

TEKNILLINEN KORKEAKOULU
RAKENNUS- JA MAANMITTAUSTEKNIIKAN OSASTO
RAKENNUS- JA YHDYSKUNTATEKNIIKAN KOULUTUSOHJELMA

RISTO KIVILUOMA

VINOKÖYSISILLAN ANALYYSI TUULIKUORMALLE

Diplomityö, joka on jätetty opinnäytteenä tarkastettavaksi diplomi-insinöörin
tutkintoa varten Espoossa 8.3.1993

Työn valvoja prof. Aarne Jutila

Työn ohjaaja TkL Torsten Lunabba

TEKNILLINEN KORKEAKOULU
RAKENNE- JA YHDYSKUNTATEKNIIKAN
LAITOSTEN KIRJASTO

Tekijä ja työn nimi : Risto Kiviluoma Vinoköysisillan analyysi tuulikuormalle	
Päivämäärä : 8.3.1993	Sivumäärä : 91
Osasto : Rakennus- ja maanmittaustekniikan osasto	Professuuri : Rak-54
Työn valvoja : prof. Aarne Jutila	
Työn ohjaaja : TkL Torsten Lunabba	
<p>Jänneväliltään pitkä vinoköysisilta on altis tuulikuorman aiheuttamille värähtelyille sekä rakenneratkaisuista riippuen myös aerodynaamisille epästabiiliusilmiöille. Sillan värähtelyn aiheuttamat haitat ovat rakenneteknisiä, fysiologisia ja liikenneturvallisuuteen liittyviä ja voivat myös lisätä sillan hoidon ja ylläpidon kustannuksia.</p> <p>Työssä esitetään tietokonepohjainen laskentamalli puuskaisen tuulen aiheuttamien värähtelyjen todennäköisyysteoreettiselle analyysille. Mallilaskenta suoritetaan suunnitteilla olevasta <i>Kärkistensalmen</i> vinoköysisillasta. Aerodynamiikan ja satunnaisvärähtelyjen teoriaa käsitellään lyhyesti.</p> <p>Tuulen puuskaisuuden ja turbulenssin vaikutus rakenteeseen on stokastinen prosessi. Satunnaisvärähtelyjen teoriaan perustuvilla laskentamalleilla voidaan määrittää rakenteen siirtymien keskihajonta ja tehospektri, kun kuormasta tunnetaan samat suureet. Olettamalla siirtymien todennäköisyysjakauman tyyppi saadaan värähtelyjen amplitudien ääriarvot määritettyä.</p> <p>Vinoköysisilloilla havaituista aerodynaamisista epästabiiliusilmiöistä keskeisimmät ovat flutterityypit, divergenssi ja pyörteiden irtaantumisesta aiheutuva epästabiilius. Erityisesti flutteri-ilmiötä on vaikea mallintaa teoreettisesti, tuulitunnelikokeet ovat toistaiseksi tarpeellisia näiden ilmiöiden luotettavaan analyysiin. Suunnitteluratkaisut vinoköysisillan aerodynaamisen stabiiliuden varmistamiseksi ovat:</p> <ul style="list-style-type: none">a) valitaan aerodynaamisesti edullinen poikkileikkausmuoto,b) varmistetaan rakenteen riittävä jäykkyys,c) lisätään mekaanista vaimennusta. <p>Esimerkkikohteen tapauksessa tuulen keskinopeus 23,1 m/s ei laskentamallin perusteella aiheuta haitallisena pidettäviä värähtelyjä valmiille sillalle, kannen värähtelyn amplitudit ovat suurimmillaan 41 mm. Kriittinen tuulenoisuus flutterille on <i>Selbergin</i> kaavasta aproksimoituna 54 m/s. Laskettu ominaismuotokohtainen vaimennussuhde aerodynaamisesta vaimennuksesta on n. 3%, huomattavasti suurempi kuin mekaaniselle vaimennukselle oletettu arvo. Rakennusvaiheessa jäykistyspalkin vapaan pään värähtelyn amplitudi voi nousta kahteen metriin mikäli rakennetta ei harusteta.</p>	

Author and name of the thesis : Risto Kiviluoma	
Analysis of a Cable-Stayed Bridge for Wind Loads	
Date : 8.3.1993	Number of pages : 91
Department : Department of structural engineering	Professorship : Rak-54
Supervisor : * prof. Aarne Jutila	
Instructor : TkL Torsten Lunabba	

In bridge-engineering, long-span cable-stayed bridges are known to be sensitive to wind load induced vibrations - and depending on structural configuration, also to aerodynamic instabilities. These vibrations should be limited for their structural, physiological, economical and safety aspects.

A computer-based calculation method for the analysing of vibrations caused by gusty wind is introduced. The method is demonstrated in practice at *Kärkistensalmi* bridge. The theory of aerodynamics and random vibrations are discussed briefly.

The effect of gust and turbulence of natural wind on a structure is a stochastic process. With the theory of random vibrations root mean square response of the structure can be calculated, if the power spectral densities due to load condition are known. The extreme response can be approximated, if the probability distribution of response is assumed.

The most important aerodynamic instabilities reported on cable-stayed bridges are different flutter types, divergence and vortex shedding phenomenon. Especially flutter is difficult to model mathematically - wind tunnel tests are needed to analyse this phenomenon properly. In order to prevent dynamic instability, the following countermeasures can be made:

- 1) to select an aerodynamically stable cross-section,
- 2) to ensure sufficient (torsional) rigidity,
- 3) to increase structural damping.

At *Kärkistensalmi* case, the mean wind speed 23,1 m/s does not seem to cause any troubles at the completed stage. The amplitudes of vibration are calculated to be less than 41 mm and the critical wind speed for flutter, according to *Selbergs* formula, is 54 m/s. The modal damping ratios for aerodynamic damping are about 3% - much more than assumed for structural damping. At the erection stage, the displacement of the deck's free end can be 2 m - if the vibration is not limited by stays.

Alkulause

"Eivät ne sillat mihinkään värähtelee"

- *Tuntematon Silta-insinööri*

Diplomityö on tehty tilaustutkimuksena Tielaitoksen Siltakeskukselle.

Kiitän Teknillisen korkeakoulun professoreita *Aarne Jutilaa*, *Martti Mikkolaa* ja *Seppo Lainetta* asiallisesti sujuneesta yhteistyöstä. Lisäksi kiitän Tielaitoksen Siltakeskuksen henkilökuntaa:

TkL *Torsten Lunabbaa* työn ohjaamisesta,
dipl. ins. *Matti Kuusivaaraa* rahoituksen järjestämisestä,
dipl. ins. *Juha Litmasta* ATK-tuesta ja tilajärjestelyistä,
dipl. ins. *Veijo Kuusista* valokuvasovituksista

sekä kaikkia työn valmistumiseen myötävaikuttaneita henkilöitä.

Espoossa 1.3.1993

A handwritten signature in black ink, consisting of a stylized first name and a longer, more complex surname.

Risto Kiviluoma

Tiivistelmä	
Abstract	
Alkulause	4
Sisällysluettelo	5
Symboliluettelo	7
1. Johdanto	9
1.1 Dynaaminen analyysi	10
1.2 Vinoköysisillan dynaaminen analyysi	10
1.3 Dynaamisen analyysin apuvälineet sillansuunnittelussa	11
2. Rakenteiden dynamiikan ja virtausmekaniikan käsitteitä	12
2.1 Vaimennus	14
2.1.1 Vaimennustyytit	14
2.1.2 Rakenteen vaimennuskyky	15
2.2 Virtausmekaniikan parametrejä	16
2.3 Ilmavirtauksen aiheuttamia epästabiiliusilmiöitä	17
3. Dynaamisen analyysin teoriaa	21
3.1 Yhden vapausasteen värähtelysteemi	21
3.1.1 Vaste Fourier-sarjamuotoiseen herätteeseen	22
3.1.2 Fourier-muunnetun liikeyhtälön ratkaisu	23
3.2 Usean vapausasteen värähtelysteemi	25
3.2.1 Vapaan vaimentamattoman värähtelyn ominaismuodot ja -taajuuudet	25
3.2.2 Suhteellinen vaimennus	26
3.2.3 Vapausasteiden rajoittaminen	27
3.2.4 Moodi-summausmenettely	28
3.2.5 Liikeyhtälöiden ratkaisu taajuustasossa	28
3.3 Satunnaisvärähtelyt	30
3.3.1 Korrelaatio ja tehospektrin tiheysfunktio	31
3.3.2 Systeemin vaste stokastiseen herätteeseen, spektrianalyysi	34
3.3.3 Tehospektrin tiheysfunktion todennäköisyystulkinta	36
4. Tuulikuorma	39
4.1 Tuuli	39
4.1.1 Tuulen keskinopeus	40
4.1.2 Tuulen heilahtelunopeus	41
4.1.3 Turbulenssin intensiteetti ja turbulenssiaste	41
4.2 Heilahtelunopeuden tehospektrin tiheysfunktiot	42
4.3 Tuulikuorman voimakomponentit	45
4.4 Herätteen tehospektrin tiheysmatriisin muodostaminen	49
4.5 Voima- ja momenttikertoimet	50
5. Laskentamalli vinoköysisillan tuulikuorman analysointia varten	52
5.1 Staattinen ratkaisu	55
5.2 Ominaismuotojen ja -taajuuksien määrittäminen	55
5.3 Vaimennusmatriisin muodostaminen	57

5.4 Kuormituksen tehospektrin tiheysmatriisi ja taajuusalue	58
5.5 Kompleksinen taajuusvastefunktio	58
5.6 Vasteen tehospektrin tiheysmatriisi	58
5.7 Varianssien laskeminen	58
5.8 Tulosten jälkikäsitely	59
5.9 Kriittisten tuulennopeuksien arvioiminen	59
5.9.1 Divergenssi	59
5.9.2 Laukkaamisilmiö	60
5.9.3 Pyörteiden irtaantuminen	60
5.9.4 Flutteri	62
6. Laskentamallin sovellus Kärkistensalmen vinoköysisiltään	63
6.1 Valmis silta	63
6.1.1 Tuulikuorman parametrit ja vasteen staattinen osa	64
6.1.2 Vasteen dynaaminen osa	66
6.2 Rakennusvaihe	70
6.3 Tulosten tarkastelu	71
7. Suunnitteluratkaisuja dynaamisen stabiiliuden varmistamiseksi	73
7.1 Köysivärähtelyjen rajoittaminen	75
8. Yhteenveto	77
Lähdeluettelo	79
Liitteet:	
A. <i>von Kármánin</i> tehospektrin tiheysfunktio	
B. TV-ver 1.1 - ohjelmisto	
C. Flutterinopeuden korjauskertoimet <i>Selbergin</i> mallissa	
D. Kärkistensalmen vinoköysisillan rakennusvaiheen rakennemallin esimerkkitulosteet	

Symboliluettelo

A	amplitudi, von Kármánin tehospektrin lausekkeen aputermi
A^*	flutterikerroin
B	kompleksinen dynaaminen jäykkyyismatriisi
C	voimakerroin, yleistetty vaimennus, koherenssivakio
C_K	epästationaarinen nostovoimakerroin
D	dynaaminen kiihdytystekijä
F	voima
F_L^*	epästationaarinen nostovoimakomponentti
F_M^*	epästationaarinen momentti
G	vakio
H	kompleksinen taajuusvastefunktio
H^*	flutterikerroin
I	turbulenssin intensiteetti
K	yleistetty jäykkyys
L	pituus
L_1	parametri Davenportin tehospektrissä (<i>length scale</i>)
L_x	parametri von Kármánin tehospektrissä (<i>integral length scale</i>)
M	yleistetty massa
P	yleistetty voima, herätteen Fourier-muunnos
R	korrelaatiofunktio
R_k	normeerattu korrelaatiofunktio
R_e	Reynoldsin luku
S	tehospektrin tiheysfunktio
S_t	Strouhalin luku
T	jaksonaika
V	virtauksen nopeus
V_1	heilahtelunopeus
V_0	tuulen keskinopeus
V_{10}	tuulen keskinopeus 10 m korkeudelta 10 min aikakeskiarvona
V_{10r}	tuulen keskinopeus 10 m korkeudelta tunnin aikakeskiarvona
V_z	tuulen keskinopeus mitattuna tunnin aikakeskiarvona
V_{REL}	suhteellinen tuulennopeus
X	vasteen Fourier-muunnos
Y	normaalikoordinaatti
a	vakio
b	poikkileikkauksen leveys, vakio
c	vaimennusvakio, vakio
d	ympyrän halkaisija
f	taajuus [Hz]
f_c	<i>coriolis</i> -parametri
f_k	pyörreradan taajuus
i	imaginaaliyksikkö, yksikkövektori x-akselin suuntaan
j	yksikkövektori y-akselin suuntaan
k	jousivakio, von Kármánin vakio, yksikkövektori
m	massa
n	kokonaisluku
p	harmoninen voima
q	ilmavirtauksen kineettinen paine
r	hitaussäde (<i>mass radius of gyration</i>)
r_k	korrelaation skaala (<i>correlation scale</i>)

s	keskiarvo
t	aika
u	heilahtelunopeuden komponentti x-suuntaan
u.	kitkanopeus
v	heilahtelunopeuden komponentti y-suuntaan
w	heilahtelunopeuden komponentti z-suuntaan
x	x-koordinaatti, x-akseli
x_1	aputermi Davenportin tehospektrissä
y	y-akseli
z	korkeus, z-akseli
z_0	maaston karheusparametri (<i>surface roughness parameter</i>)
Φ	ominaismuotomatriisin tunnus
Ω	maapallon kulmataajuus
Ω^2	ominaisarvomatriisin tunnus
α	kohtauskulma
β	herätteen ja systeemin kulmataajuuden suhde
δ	logaritminen dekrementti
ε	suhteellinen muodonmuutos
η	dynaaminen viskositeetti, aputermi
θ	vääntökulma
θ_c	leveyspiiri
ν	tehollinen taajuus (<i>zero uppcrossing frequency</i>)
ξ	moodikohtainen vaimennussuhde
ρ	tiheys
σ	keskihajonta, jännitys
σ^2	varianssi
τ	ajanjakso
τ_0	leikkausjännitys
ϕ	ominaismuoto
ω	kulmataajuus
ω_D	vaimennetun värähtelyn kulmataajuus
φ	vaihekulma

Alaindeksit:

D	vastus, divergenssi
F	flutteri
G	laukkaamisilmiö (<i>galloping</i>)
L	nostovoima
M	momentti
Q	poikittais(voima)
T	vääntö
a	aerodynaaminen
cr	kriittinen
e	ääriarvo
eff	efektiivinen
i	indeksi, matriisin i:s vaakarivi
j	indeksi, matriisin j:s pystyrivi (sarake)
p	harmoninen voima, heräte
st	staattinen
u, v, w	suunta
x, y, z	suunta

1. Johdanto

Tämän tutkimustyön tavoitteena on selvittää teoreettisesti vinoköysisillan aerodynamiikkaan ja värähtelyihin liittyvää ongelmakenttää, ja esittää laskentamalli tuulikuormituksen tarkemmalle analyysille. Luettavuuden helpottamiseksi esitetään rakenteiden dynamiikan käsitteitä ja käytettyjen termien määritelmät.

Laskentamallina esitetään puuskaisen tuulen aiheuttamien värähtelyjen todennäköisyysteoreettinen tarkastelu spektrianalyysillä. Mallilaskenta suoritetaan suunnitteilla olevasta Kärkistensalmen vinoköysisillasta (kuva 1). Laskentamallia voidaan soveltaa myös muuntyyppisiin rakenteisiin, esim. korkeisiin rakennuksiin ja mastoihin. Työn yhteydessä on tarvittavilta osin ohjelmoitu laskentamallin edellyttämät tietokoneohjelmat.



Kuva 1. Esimerkkilaskennassa käytettävä (suunnitteilla oleva) Kärkistensalmen vinoköysisilta. Valokuvasovitus: Tielaitos/Siltakeskus

Vinoköysisilta on käytetty siltatyyppi pitkiä jännevälejä edellyttävissä kohteissa. Vinoköysisilloille tyypillisiä piirteitä ovat korkea pyloni, johon köydet on suoraan tuettu ja matala jäykistyspalkki. Suurten riippu- ja vinoköysisiltojen suunnittelussa tuulikuorma ja tuulikuorman dynaamisen osan aiheuttamat värähtelyt voivat muodostua keskeiseksi mitoitustekijäksi. Sillan värähtelyominaisuuksien selvittämiseksi staattista analyysiä on täydennettävä dynaamisella analyysillä.

1.1 Dynaaminen analyysi

Dynaamisella analyysillä (rakennetekniikassa) tarkoitetaan suunnittelun suorittamista sellaisella laskentamallilla, jossa otetaan huomioon rakenneosien liikkeestä aiheutuvat hitaus- ja vaimennusvoimat sekä kuormituksen aikariippuvuus. Tarkasteltavien rakenneosien liiketila on yleensä värähtelytyypistä eli tasapainoaseman ympärillä tapahtuvaa jaksollista tai jaksotonta liikettä.

Dynaamisen analyysin tavoitteena on riittävän varmuustason saavuttaminen rakenneosien liikkeestä (värähtelystä) aiheutuvien haitallisten ilmiöiden suhteen. Rakenteen kestävyys tarkempi määrittäminen tuulikuorman dynaamiselle osalle voidaan suorittaa käytännössä kahdella tavalla - väsytyскоkeiden perusteella (lentokoneteollisuus) tai rakenteiden dynamiikan laskentamalleilla (rakennetekniikka).

Rakenteiden dynamiikan laskentamalleilla voidaan ennakoida värähtelyilmiöiden vaikutusta ja siten optimoida suunnitteluratkaisuja. Dynaaminen analyysi voidaan suorittaa myös jälkikäteen suunniteltaessa toimenpiteitä rakenteen haitallisten värähtelyominaisuuksien korjaamiseksi. Yleisesti rakennus- ja rakennetekniikassa dynaamisen analyysin luonne on ollut tarkastavaa - staattisen mitoituksen jälkeen laskennallisesti osoitetaan ettei haitallisena pidettäviä värähtelyilmiöitä esiinny.

1.2 Vinoköysisillan dynaaminen analyysi

Suuri vinoköysisilta on rakenteellisen joustavuutensa johdosta altis liikenne- ja tuulikuorman sekä maanjäristysten aiheuttamille värähtelyilmiöille. Tuulikuorman dynaamisen osan aiheuttama värähtelytila voi epäedullisissa olosuhteissa johtaa koko rakenteen sortumiseen tai paikallisiin vaurioihin, esim. köysien suojaputkien rikkoontumiseen. Kannen värähtely voi aiheuttaa liikenneturvallisuuden heikentymistä ja epämukavuuden tunnetta. Värähtely aiheuttaa väsytyskuormitusta rakenteisiin ja voi siten lisätä sillan hoidon ja ylläpidon tarvetta. Dynaamisen analyysin keskeisiä tavoitteita ovat koko sillan stabiiliuden varmistus tuulikuorman suhteen sekä köysien ja kansirakenteen värähtelyjen rajoittaminen.

Mitoitus dynaamisille kuormille suoritetaan yksinkertaisimmillaan staattisen korvauskuorman perusteella. Menettelyn etu on että sillasuunnittelijat ovat rutinoituneita staattisen analyysin suorittamiseen - ongelmana on staattisten korvauskuormien luotettava määrittäminen vertailuaineiston puuttuessa. Mikäli mitoitus tehdään korvauskuormilla, voidaan nämä määrittää tapauskohtaisesti dynaamisella analyysillä.

Suunniteltaessa jänneväliltään yhä pitempiä siltoja ja pyrittäessä materiaalin tarkempaan käyttöön on perusteltua ottaa sillan dynaaminen toiminta huomioon jo suunnittelun alkuvaiheessa. Viime vuosikymmeninä on tarkemmassa mitoituksessa alettu soveltamaan virtausmekaniikan ja aerodynamiikan laskentamalleja. Sillan aerodynamiikan parantaminen on noussut yhdeksi kehityskohteeksi suurten vinoköysisiltojen suunnittelussa.

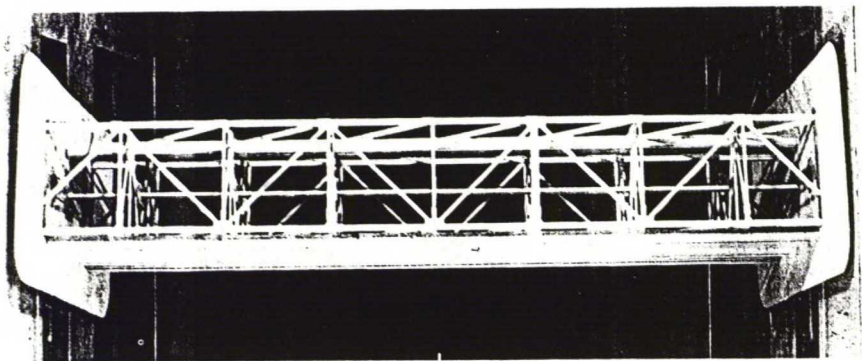
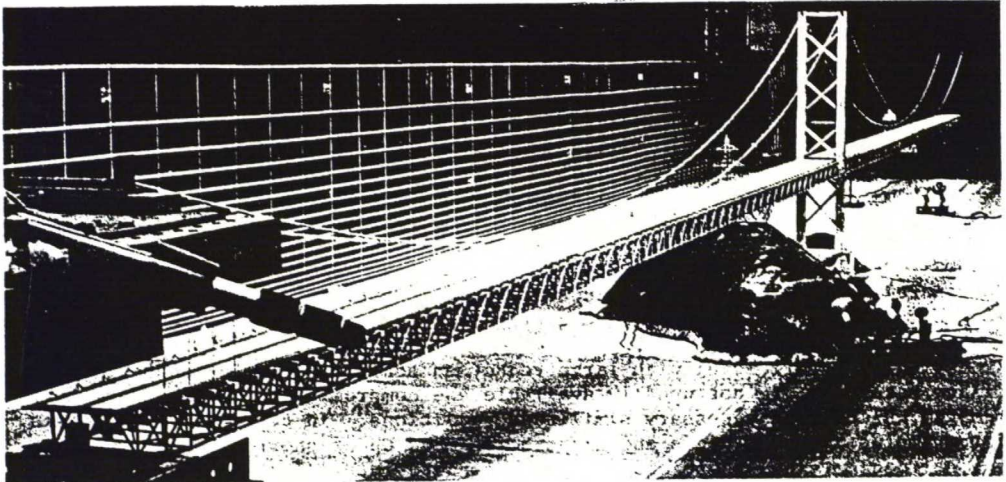
Vinoköysisilta on rakenneteknisessä mielessä jäykistyspalkin, pylonin, perustusten ja köysien muodostama kokonaisuus. Näiden geometria,

massat ja jäykkyydet vaikuttavat suuresti myös värähtelyilmiöiden esiintymiseen. Ympäristöolosuhteet ja ympäröivän maaston korkeussuhteet määräävät siltaan kohdistuvat luonnonkuormat. Tarvittavan dynaamisen tarkastelun laajuuden määrittäminen jää siten tapauskohtaisesti harkittavaksi.

1.3 Dynaamisen analyysin apuvälineet sillansuunnittelussa

Dynaaminen analyysi suoritetaan yleensä rakenteiden dynamiikan laskentamalleilla, käsinlaskumenetelmillä tai tietokoneavusteisesti. Malleja voidaan täydentää virtausmekaniikan ja tilastomatematiikan pohjalta määritettyjen parametrien avulla. Tietojenkäsittelykapasiteetin kasvu ja erityisesti elementtimenetelmään perustuvien tietokoneohjelmien kehitys on mahdollistanut laajojen rakennemallien laskemisen.

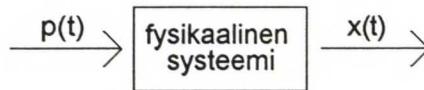
Aerodynaamisten ominaisuuksien selvittämiseksi vaativimmille kohteille voidaan tehdä tuulitunnelikokeita (kuva 2). Tuulitunnelikokeilla saadaan määritettyä aerodynamiikan ja virtausmekaniikan laskentamallien parametreja sekä analysoitua koko rakenteen dynaamista toimintaa.



Kuva 2. Riippusillan koko rakenteen ja jäykistyspalkin osan pienoismalli tuulitunnelikokeessa [17].

2. Rakenteiden dynamiikan ja virtausmekaniikan käsitteitä

Värähtelysteemiä voidaan kuvata seuraavalla kaaviolla:



missä p on *heräte* (menosuure, *input*) ja x on tarkasteltava *vaste* (tulosuure, *output*). Heräte ja vaste ovat ajan funktioita. Rakenteiden dynamiikassa herätteet ovat tyypillisesti kuormia ja vasteet siirtymiä. Jos systeemin heräte tunnetaan tarkasti ajan funktiona eli heräte on *deterministinen*, voidaan systeemin vaste (matemaattisen mallin puitteissa) määrittää tarkasti. Jos herätteen aikariippuvuutta ei tunneta tarkasti eli heräte on *stokastinen*, ei myöskään systeemin vastetta voida ratkaista tarkasti.

Värähtelysteemit jaetaan lineaarisiin ja epälineaarisiin. Lineaariselle systeemille voidaan heräte jakaa komponentteihin (esim. staattinen ja dynaaminen osa) ja laskea vaste kullekin komponentille erikseen. Lineaariselle systeemille pätee superpositioperiaate, koko systeemin vaste saadaan yhdistämällä herätekomponenttien aiheuttamat vasteet. Lineaaristen sistemien käsittelyyn on useita tehokkaita matemaattisia malleja. Epälineaaristen sistemien käsittelyn perustana on usein oletus siitä, että epälineaariset systeemit palautuvat lineaarisiksi, kun systeemiä tarkastellaan äärettömän pienillä aikaväleillä.

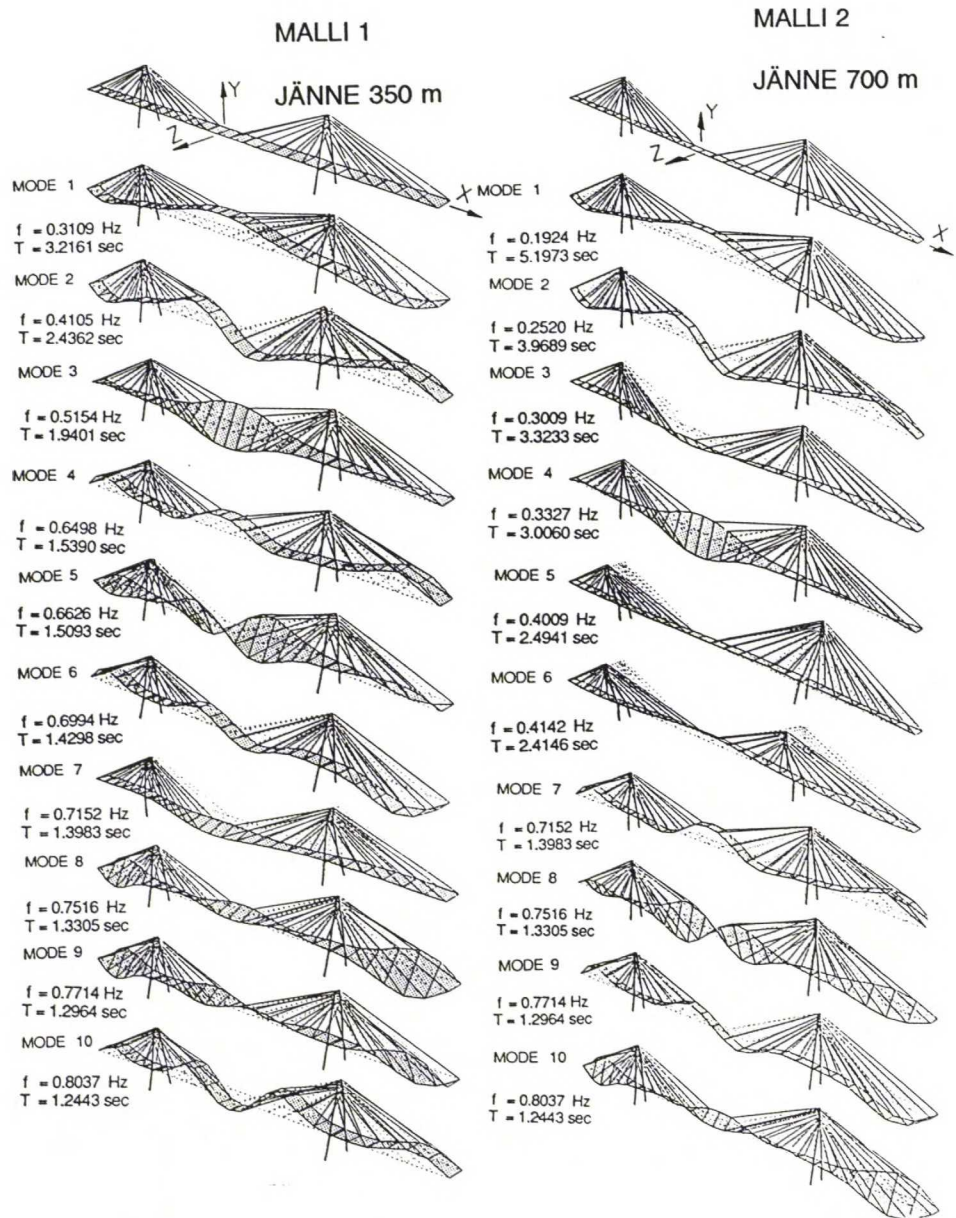
Heräte ja vaste voivat olla jaksollisia tai jaksottomia. *Jaksollisessa* tapauksessa tarkasteltava suureen ominaisuus toistuu tietyin aikavälein. Aikaväliä kutsutaan *jaksonajaksi*. *Taajuus* on jaksonajan käänteisluku. *Amplitudi* on tarkasteltavan suureen suurin arvo tasapainoasemasta jakson aikana. *Jaksottomassa tapauksessa* heräte tai vaste voivat vaihdella esim. kertaluontoisesti tai satunnaisesti.

Vapausasteiden lukumääräksi kutsutaan riippumattomien koordinaattien lukumäärää, jolla rakenneosan liiketila voidaan kuvata. *Värähtelymuoto* on rakenneosan muoto deformatiivisessa tilassa. Taajuuksia, joilla systeemi pyrkii herkimmin värähtelemään, sanotaan *ominaistaajuuksiksi*. Rakenteen ominaistaajuuksia vastaavat tietyt *ominaismuodot* eli värähtelymuodot jolla rakenne pyrkii värähtelemään. Pienintä ominaistaajuutta vastaava muotoa sanotaan ensimmäiseksi ominaismuodoksi, seuraavaa toiseksi, jne. Herätteestä riippuu mitkä näistä ominaismuodoista esiintyvät. Kuvassa 3 on havainnollistettu vinoköysisillan ensimmäisiä ominaismuotoja.

Värähtelytyypeistä erotetaan kaksi tapausta, *vapaa-* ja *pakkovärähtely*. Vapaa värähtely on systeemin värähtelyä kun systeemiin ei vaikuta ulkoisia voimia eli heräte on nolla. Systeemin reunaehdot ja sisäiset lait määräävät tällöin systeemin vasteen. Pakkovärähtelyn tapauksessa heräte vaihtelee ajan funktiona. Jos heräte on jaksollista, värähtelysteemi pyrkii ajan kuluessa värähtelemään herätteen taajuudella johtuen värähtelysteemiin liittyvästä vaimennuksesta (kohta 2.1). Vaihetta, jossa systeemin ominais-

taajuudet vielä vaikuttavat värähtelytaajuuteen, kutsutaan *transienttivaiheeksi*. Vastaavasti vaihetta, jolloin systeemi värähtelee pakkovärähtelyn taajuudella, sanotaan *vakaan tilan vaiheeksi*.

Jos herätteen taajuus yhtyy värähtelysteemin johonkin ominaistajuuteen, on kysymyksessä *resonanssi*, jolloin rakenteen amplitudi pyrkii kasvamaan voimakkaasti ja systeemi saattaa vaurioitua. Edullisemmassa tapauksessa systeemin sisäiset ja ulkoiset vaimennusvoimat rajoittavat amplitudin kasvua siten, ettei systeemi vaurioidu.



Kuva 3. FEM-mallilla laskettuja vinoköysisillan ominaistajuuksia ja vastaavat ominaismuodot [21].

2.1 Vaimennus

Käytännön värähtelysysteemiin liittyy aina vaimennusta. Vaimennusilmiötä voidaan tarkastella energiaperiaatteen pohjalta. Vaimennetussa värähtelysysteemissä vaikuttaa liikettä vastustavia vaimennusvoimia, joiden tekemä työ, *dissipatioenergia*, poistuu systeemistä. Vaimennettu värähtelysysteemi ei ole *konservatiivinen*, energiaa säilyttävä. Tietyissä tapauksissa vaimennusvoimat voivat lisätä systeemin energiaa, tapauksesta käytetään nimitystä *negatiivinen* vaimennus. Vaimennuksen arvoa, jolla systeemi ei värähtele, sanotaan *kriittiseksi* vaimennukseksi.

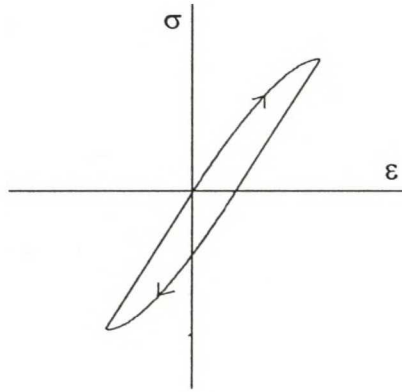
2.1.1 Vaimennustyytit

Vaimennustyytit voidaan jakaa yleisesti *viskoosi*-, *kitka*- ja *hystereesiseen*-vaimennukseen. *Mekaaninen*- ja *aerodynaaminen* vaimennus, kohta 2.1.2, ovat paitsi vaimennustyyppejä, myös koko systeemin ominaisuuksia, joten ne on käsitelty erikseen. Hystereesistä- ja mekaanisesta vaimennuksesta käytetään myös nimitystä *rakenteellinen* vaimennus (*structural damping*). Tällöin rakenteellisella vaimennuksella tarkoitetaan mekaanista vaimennusta tarkasteltaessa koko värähtelysysteemin sisäisiä vaimennusvoimia, ja vastaavasti hystereesistä vaimennusta, kun tarkastellaan rakenneosien sisäisiä vaimennusvoimia.

Viskoosi vaimennusvoima on verrannollinen nopeuteen. Viskoosia vaimennusta kuvataan useasti nestesylinterianalogialla, jossa nesteen viskositeetti aiheuttaa nestesylinterissä liikkuvaan mäntään nopeuteen verrannollisen voiman. Viskoosilla vaimennuksella on tärkeä merkitys rakenteiden dynamiikassa, johtuen sen yksinkertaisesta matemaattisesta mallista. Käytännön vaimenninelementit voivat toimia nestesylinterianalogian mukaisesti, esimerkkinä auton iskunvaimentimet.

Kitkavaimennus aiheutuu rakenneosien välisten pintojen kitkavoimista. *Coulombin* vaimennus on kitkasta aiheutuvaa vaimennusta jossa vaimennusvoiman suuruus on vakio. Kitkavoiman tekemä työ (energiahäviö) on suoraan verrannollinen pintojen väliseen siirtymään. Esimerkkinä sillassa esiintyvistä kitkavaimennuksesta on laakerikitkan aiheuttama vaimennus.

Hystereesinen vaimennus aiheutuu (vaihtokuormitetun) rakenneosan materiaalin epätäydellisen kimmoisan toiminnan aiheuttamasta energiahäviöstä. Koska materiaalin toimintaa voidaan pitää kimmoisana vain tiettyyn rajaan saakka, on energiahäviöiden määrä ja hystereesinen vaimennus verrannollista jännityksiin ja muodonmuutoksiin. Energiahäviötä yhtä kuormitus sykliä kohden havainnollistetaan useasti jännitys-muodonmuutoskuvaajaan piirretyllä *hystereesis*-silmukalla (kuva 4). Hystereesis-silmukan sisälle jäävä pinta-ala kuvaa energiahäviötä tilavuusyksikköä kohden. Jännitykset ja muodonmuutokset ovat kimmoteorian puitteissa suoraan verrannollisia amplitudiin, josta seuraa, että kuormitus syklin energiahäviö on verrannollinen amplitudin neliöön. Vaimennustyytistä käytetään myös nimitystä *kiinteä* vaimennus (*solid damping*).



Kuva 4. Jännitys - muodonmuutoskuvaajaan piirretty hystereesisilmukka.

2.1.2 Rakenteen vaimennuskyky

Rakenteen vaimennuskyky muodostuu mekaanisesta ja aerodynaamisesta vaimennuksesta. Mekaaninen vaimennus on värähtelysteemin sisäisten vaimennusvoimien aiheuttamaa. Aerodynaaminen vaimennus on esimerkki systeemin ulkopuolisten voimien aiheuttamasta vaimennuksesta.

Mekaaninen vaimennus johtuu rakenneosien liikkeen aiheuttamista muodonmuutoksista ja kosketuspintojen vuorovaikutuksista. Viskoosi-, hystereesi- ja kitkavaimennusta voidaan pitää mekaanisen vaimennuksen komponentteina. Rakenneosan värähtelyyn sitoutunut energia pyrkii siirtymään liitosten kautta ympäröiviin rakenneosiin. Liitoksissa ja rakenneosissa tapahtuvien energiahäviöiden johdosta systeemin kokonaisenergia pienenee. Tarkasteltaessa yhtä rakenneosaa saattaa sen amplitudi pienentyä, pysyä ennallaan tai kasvaa riippuen siitä miten värähtelyenergia siirtyy koko rakenteen sisällä.

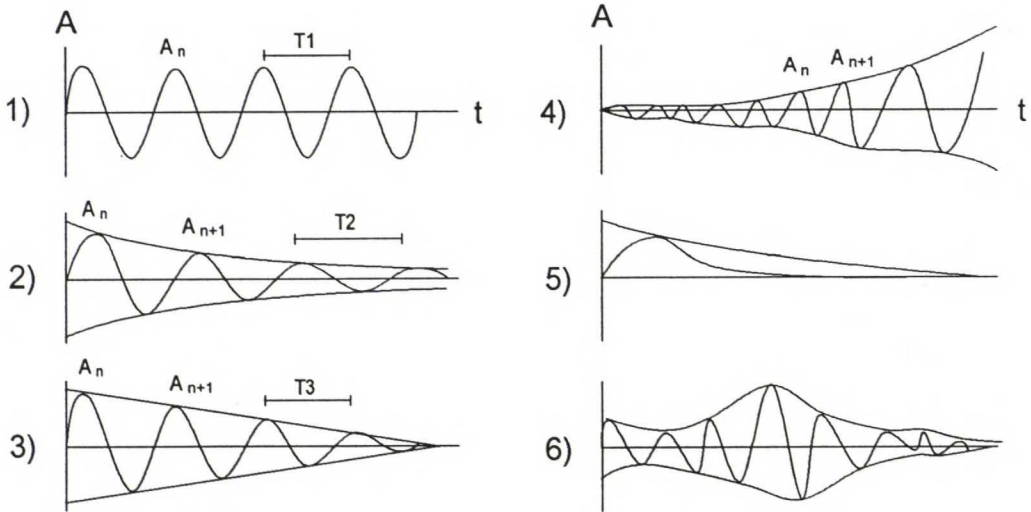
Suuren rakennesysteemin mekaaninen vaimennus on vaikeasti mallinnettavissa, tärkeää on liitosten toiminnan tunteminen. Mekaaninen vaimennus pienenee rakenneosien- ja niiden välisten liitosten jäykkyyden kasvaessa ja vastaavasti suurenee esim. perustusten joustavuuden kasvaessa. Käytännön dynaamisessa analyysissä joudutaan mekaaninen vaimennus yleensä arvioimaan ominaismuotokohtaisesti, suhteena kriittiseen vaimennukseen.

Aerodynaaminen vaimennus, ilmanvastus, on liikkuvan (värähtelevän) rakenneosan ja ilman vuorovaikutuksesta aiheutuva vaimennustyyppi. Vaimennus koostuu viskoosi- ja hitausvoimista. Vuorovaikutuksesta voi aiheutua negatiivinen vaimennus. Aerodynaamisen vaimennuksen määrittämistä käsitellään luvussa 4.

Rakenteen vaimennuskykyä kuvataan ns. *logaritmisella dekrementillä* δ , joka on kahden peräkkäisen jakson amplitudien suhteen luonnollinen logaritmi.

Vaimennustyyppien vaikutusta harmoniseen värähtelyyn on havainnollistettu kuvassa 5. Kuvan merkinnöillä

$$\delta = \ln\left(\frac{A_n}{A_{n+1}}\right). \quad (1)$$



- 1) Vaimentamaton systeemi, jaksonaika T_1
 2) Viskoosi vaimennus, δ on vakio, $T_2 > T_1$
 3) Coulombin kitkavaimennus, $T_3 = T_1$

- 4) Negatiivinen vaimennus $A_{n+1} > A_n$
 5) Kriittinen vaimennus, ei värähtelyä
 6) Mekaaninen vaimennus, $A \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$

Kuva 5. Vaimennuksen vaikutus amplitudiin (A) ajan (t) funktiona.

2.2 Virtausmekaniikan parametrejä

Reynoldsin luku - R_e , kuvaa virtauksen tyyppiä virtausta rajoittavan kappaleen ympäristössä. Alhaisella R_e :n alueella kappaleen ohi kulkeva virtaus pyrkii olemaan *laminaarista* ja korkealla turbulenttista (josta esimerkiksi kuvassa 23, sivulla 50). R_e on verrannollinen virtauksen hitaus- ja viskoosivoimien suhteeseen mutta sen absoluuttisella arvolla ei ole fyysikaalista merkitystä. Ympyräpoikkileikkauksisen lieriön ohi kulkevalle virtaukselle (esim. kannatinvaijerille) R_e määritellään [16]

$$R_e = \frac{\rho V d}{\eta}, \quad (2)$$

missä: V = virtauksen nopeus,
 d = ympyrän halkaisija,
 ρ = virtaavan aineen tiheys; ilmalle ($+20^\circ\text{C}$) $1,2 \text{ kg/m}^3$,
 η = dynaaminen viskositeetti; ilmalle $18,0 \cdot 10^{-6} \text{ Ns/m}^2$.

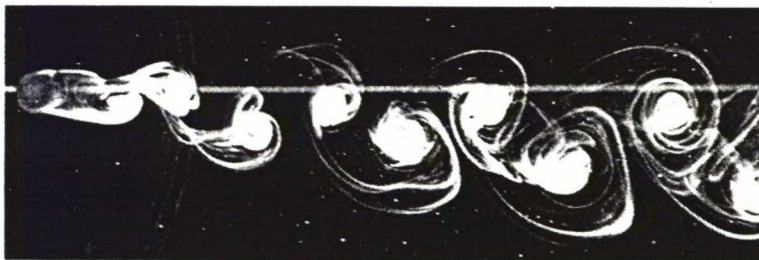
Strouhalin luku - S_r , on dimensioton kerrointekijä pyörreradan (kuva 6) taajuuden lausekkeessa [27]

$$f_k = S_r \frac{V}{d}, \quad (3)$$

missä f_k on (von Kármánin) pyörreradan taajuus. Ympyräpoikkileikkauksen

tapauksessa S_i on laajalla R_e :n alueella vakio - kuitenkin R_e :n alueella $2 \cdot 10^5 \dots 2 \cdot 10^6$ pyörreradan muodostus on kaaottista ja S_i :n arvo vaikeasti määritettävissä. Ympyräpoikkileikkauksen R_e :n riippuvuus S_i :stä on esitetty kuvassa 27, sivulla 61.

Muilla kun ympyräpoikkileikkauksille R_e ja S_i lasketaan kaavoista (2) ja (3), käyttämällä mittana d jotain poikkileikkauksen karakterisoivaa mitta. Karakterisoiva mitta on tällöin tapana esittää määritetyn arvon yhteydessä.



Kuva 6. Esimerkki pyörreradasta [21].

Tarkasteltaessa tuulitunnelikokeiden ja todellisen rakenteen toiminnan yhteyttä käytetään R_e :n lisäksi myös muita dimensiotomia kertoimia [1], joista esimerkkinä: **Frouden** luku - virtauksen hitausvoimien suhde rakenteosan gravitaatiovoimaan sekä **Couschyn** luku - virtauksen kimmovoimien suhde virtauksen hitausvoimiin.

Kitkanopeus määritellään kaavalla

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}, \quad (4)$$

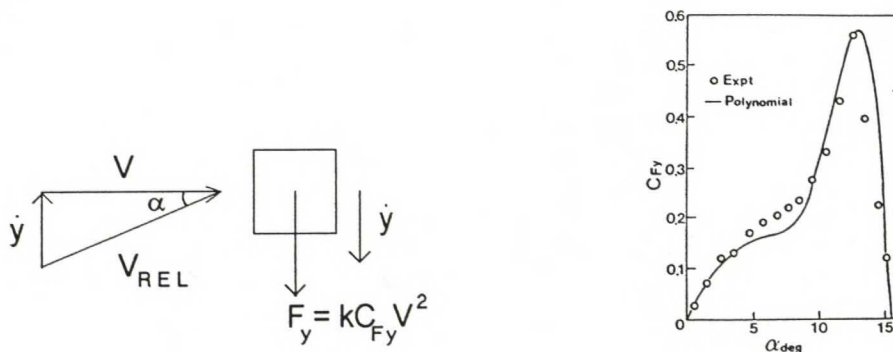
missä τ_0 on leikkausjännitys virtauksen ja rakenneosan välisessä rajapinnassa.

2.3 Ilmavirtauksen aiheuttamia epästabiiliusilmiöitä

Ilmavirtauksen aiheuttamat epästabiiliusilmiöt voidaan jaotella staattisen- ja dynaamisen stabiiliuden käsitteeseen kuuluviksi. Dynaamisen stabiiliuden käsitteeseen kuuluvat ilmiöt, joissa rakenteen stabiiliuden menetys tapahtuu värähtelyn amplitudin kasvun seurauksena.

Divergenssiksi (*divergence*) nimitetään epästabiiliusilmiöitä, jossa rakenteen suurten muodonmuutosten seurauksena tuulikuorma vaikuttaa rakenteeseen epäedullisesti ja tästä aiheutuu rakenteen stabiiliuden menetys. Sillalla divergenssi voi esiintyä esim. kannen vääntymisen seurauksena.

Laukkaamisilmiö (*galloping*) on seurausta ns. *suhteellisen tuulennopeuden* V_{REL} ja rakenneosan välisen kulman α epäedullisesta muuttumisesta poikittaisvärähtelyn aikana. Suhteellisella tuulennopeudella tarkoitetaan tuulen nopeusvektorin ja rakenneosan nopeusvektorin resultanttia (kuva 7). Ilmiö rinnastetaan "poikittaisflutteriin" (*flutter in transverse translation*). Ilmiöstä voi aiheutua negatiivinen vaimennus, eli tilanne jossa ilmapirrasta siirtyy energiaa värähtelyyn enemmän kuin vaimennusvoimat sitä poistavat. Laukkaamisilmiö esiintyy rakenneosilla, joilla suhteellisen tuulennopeuden suunnan muutos lisää poikittaisvoimia. Rakenneosa, jonka poikkileikkaus on ympyrä (esim. jäätymätön kannatinvaijeri), ei siten ole altis laukkaamisilmiölle. Silloissa laukkaamisilmiö saattaa vaarantaa pylonin stabiiliuden rakennusvaiheessa.



Kuva 7. Suhteellinen tuulennopeus ja nostovoimakertoimen riippuvuus kulmasta α neliöpoikkileikkaukselle [17].

Vääntöflutterissa (*torsional flutter, -galloping*) rakenneosan vääntövärähtely pyrkii voimistumaan vääntövärähtelyn aiheuttaman suhteellisen tuulennopeuden muutoksen seurauksena. Ilmiö voidaan rinnastaa laukkaamisilmiöön - poikittaisvärähtelyjen sijasta rakenneosa joutuu vääntövärähtelyyn. Vääntöflutterille alttiita rakenneosia ovat poikkileikkaukseltaan H:n muotoiset rakenneosat [18].

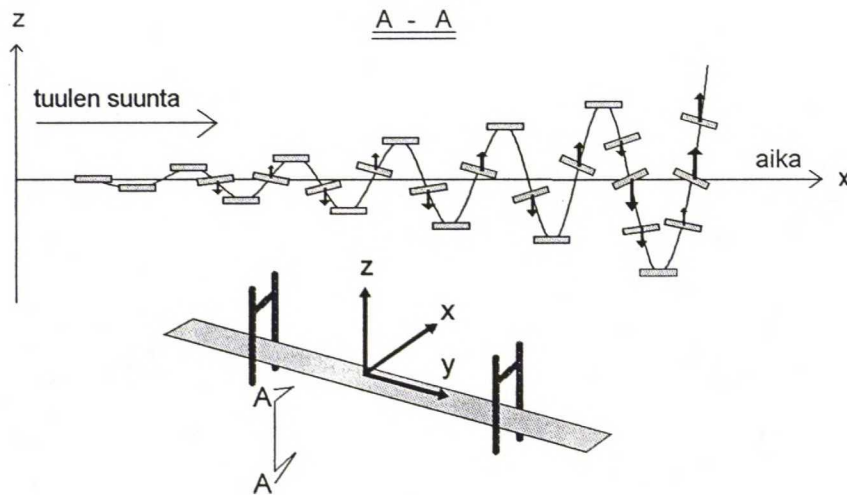
"Klassisella" **flutterilla** (*classical-, coupled flutter*) tarkoitetaan kahden vapausasteen (liikesuunnan) ja tuulen vuorovaikutuksesta syntyvää epästabiiliusilmiötä. Sillalle vaarallinen kuormitus syntyy kannen vääntövärähtelyn ja pystysuuntaisen taivutusvärähtelyn (eli laukkaamisilmiön ja vääntöflutterin) yhteisvaikutuksesta (kuva 8). Vaikka systeemi olisi stabiili laukkaamisilmiön ja vääntöflutterin suhteen, voi vapausasteiden vuorovaikutuksesta seurata negatiivinen vaimennus.

Flutterityypit ovat esimerkkejä epästabiiliusilmiöistä joilla alkuherätteen jälkeen värähtelyn amplitudi pyrkii jatkuvasti kasvamaan (*divergent amplitude response*). Näille ilmiöille on yhteistä suhteellisen tuulennopeuden suunnanmuutoksen aiheuttama "itsekiihdytetty" värähtely (*self excited vibration*).

Pyörteiden irtaantumisesta (*vortex shedding*) aiheutuvassa epästabiiliusilmiöissä pyörteiden aiheuttamien herätekomenttien taajuus yhtyy rakenneosan ominaistajuuksiin ja tästä seuraa resonanssi. Pyörteiden irtaantuminen voi "lukkiintua" rakenneosan värähtelyliikkeeseen, mikä

edelleen voimistaa ilmiötä. Resonanssia vastaavat tuulennopeudet voidaan arvioida Strouhalin luvun perusteella.

Ilmiö voi esiintyä myös poikkileikkaukseltaan ympyränmuotoisilla rakenneosilla (esim. savupiiput). Rakenneosan poikkileikkausmuoto vaikuttaa voimakkaasti taustapyörteisyyden ja pyörreradan muodostumiseen ja siten ko. epästabiiliusilmiön syntyyn. Lentokoneteollisuudessa käytettävät siipi-poikkileikkaukset ovat esimerkkeinä poikkileikkausmuodoista, joiden aiheuttama pyörteisyys on vähäistä. Sillan tapauksessa pyörteiden irtaantumises-ta aiheutuvat herätteet voivat aiheuttaa köysivärähtelyn amplitudin haittalista kasvua tai jäykistyspalkin väsytskuormitusta.



Tuulikuorman nostokomponentti on verrannollinen kulmaan tuulen ja rakenteen välillä. Vääntöväärähtelyn johdosta kansipoikkileikkaus on tuulikuormituksen suhteen epäedullisessa kulmassa, josta seuraa pystysuuntaisen taivutusväärähtelyn amplitudin kasvu.

Kuva 8. Flutterin kehittyminen.

Turbulenssista ja tuulen puuskaisuudesta aiheutuvat pakkoliikkeet ovat seurausta tuulikuorman dynaamisen osan aiheuttamista herätteistä. Ellei virtaus ole valmiiksi turbulenttista, se voi muuttua turbulentiksi siinä vaiheessa kun se kohtaa rakenteen reunimmaisiet osat. Tyypillinen tilanne on tuulen puolella olevan rakenneosan aiheuttama turbulenssi, ja siitä seuraava tuulen alapuolisen rakenneosan pakkovärähtely (*buffeting*-ilmiö). Turbulenssi ja puuskaisuus ovat luonteeltaan satunnaisia ja on olemassa mahdollisuus, että herätteiden jaksot yhtyvät rakenneosan ominaistajuuksiin.

Sillan pakkoliikkeiden amplitudia on syytä pyrkiä rajoittamaan käyttömukavuuden turvaamiseksi ja haitallisten väsytskuormitusten pienentämiseksi.

Sateen indusoimat värähtelyt (*rain induced vibrations*) ovat joillakin silloilla havaittu ilmiö [1], jossa veden virtaus ja tippuminen köydestä aiheuttaa köyden värähtelyominaisuuksien epäedullisia muutoksia. Köydessä oleva vesi toimii ylimääräisenä massana, joka irtaantuessaan aiheuttaa herätteitä vajeriin. Herätteet voivat synkronoitua värähtelyliikkeeseen ja kasvattaa täten värähtelyn amplitudia.

Sillalle kolmen edellisen ilmiön aiheutumat vauriot ovat useasti seuraukseltaan vaarattomampia kuin divergenssi- tai flutteri-ilmiöiden aiheuttamat. Toisaalta ilmiöt esiintyvät useammin ja myös alhaisilla tuulennopeuksilla, joten näiden ilmiöiden aiheuttamiin vaurioihin voidaan joutua varautumaan, sekä dynaamisessa analyysissä että myös sillan ylläpidossa ja huollossa. Luvussa 5 esitetään yksinkertaistetut matemaattiset mallit edellisten epästabiiliusilmiöiden analyysiin. Kuvassa 9 on esitetty yhteenvetona eräs tapa jaotella tuulen vaikutus rakenteeseen.

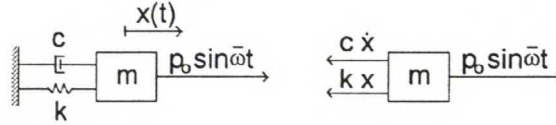
staattinen	tuulen keskinopeuden vaikutus			
	staattinen epästabiilius	divergenssi		
		lommahdus		
dynaaminen	dynaaminen epästabiilius	laukkaamisilmiö	yksi vapausaste	kasvava amplitudi
		vääntöflutteri		
		flutteri		
		pyörteiden irtaantuminen		rajoitettu amplitudi
	turbulenssi (puuskat, buffeting-ilmiö)			

Kuva 9. Eräs jaottelu tuulen vaikutukselle rakenteeseen [17].

3. Dynaamisen analyysin teoriaa

3.1 Yhden vapausasteen värähtelysteemi

Tarkastellaan useamman vapausasteen värähtelysteemin alkeistapauksena kuvan 10 mukaista yhden vapausasteen harmonisesti kuormitettua värähtelysteemiä, jonka muodostavat pistemassa, lineaarinen jousi ja viskoosi vaimennin.



Kuva 10. Yhden vapausasteen harmonisesti kuormitettu värähtelysteemi.

Systeemin liikeyhtälöksi saadaan voimatasapainon perusteella

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p_0 \sin \bar{\omega} t, \quad (5)$$

missä c on vaimennusvakio, k jousivakio, m kappaleen massa ja aikaderivaattaa on merkitty yläpisteellä.

Otetaan käyttöön tai määritellään [6] suureet

$$\begin{aligned} T_i &= \text{jaksonaika,} \\ \omega_i &= \text{kulmataajuus,} \\ f_i &= \frac{1}{T_i} = \frac{\omega_i}{2\pi} = \text{taajuus,} \\ \omega &= \sqrt{\frac{k}{m}} = \text{vapaan vaimentamattoman värähtelyn} \\ &\quad \text{kulmataajuus,} \\ c_c &= 2m\omega = \text{kriittinen vaimennus,} \\ \xi &= \frac{c}{c_c} = \text{vaimennussuhde,} \\ \beta &= \frac{\bar{\omega}}{\omega} = \text{herätteen kulmataajuuden ja } \omega\text{:n suhde,} \\ \omega_D &= \omega\sqrt{1-\xi^2} = \text{vapaan vaimennetun värähtelyn} \\ &\quad \text{kulmataajuus.} \end{aligned} \quad (6)$$

Logaritmisen dekrementin ja vaimennussuhteen välillä on yhteys [6]

$$\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \approx 2\pi\xi. \quad (7)$$

Kun vaimennus on kriittistä vaimennusta pienempi eli systeemi värähtelee, on yhtälön (5) homogeenisen osan ratkaisu [6]

$$x_h = e^{-\xi\omega t} (G_1 \sin \omega_D t + G_2 \cos \omega_D t), \quad (8)$$

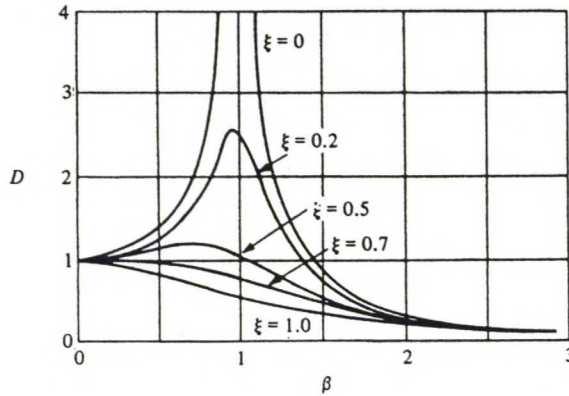
missä G_1 ja G_2 ovat alkuehdoista määräytyviä vakioita, ja erikoisratkaisu

$$x_e = \frac{p_0}{k} \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} [(1-\beta^2) \sin \bar{\omega} t - 2\xi\beta \cos \bar{\omega} t]. \quad (9)$$

Täydellinen ratkaisu saadaan homogeenisen osan ja erikoisratkaisun summana. Homogeeninen ratkaisu häviää transienttivaiheen mukana johtuen kerrointekijästä, ja systeemin vakaan tilan vaste määräytyy erikoisratkaisun perusteella. Vasteen amplitudin suhdetta staattisen kuorman p_0 aiheuttamaan siirtymään kutsutaan *dynaamiseksi kiihdytystekijäksi* ja se on [6]

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}. \quad (10)$$

Kuvassa 11 on havainnollistettu kiihdytystekijän riippuvuutta vaimennuksesta ja tajuuksista. Kuvasta havaitaan resonanssikohtan ($\beta=1$) amplitudin voimakas riippuvuus vaimennussuhteesta ξ .



Kuva 11. Dynaamisen kiihdytystekijän riippuvuus vaimennuksesta [6].

3.1.1 Vaste Fourier-sarjamuotoiseen herätteeseen

Oletetaan, että heräte voidaan kehittää sini- ja kosinitermejä sisältäväksi sarjakehitelmäksi. Oletetaan edelleen systeemi lineaariseksi, jolloin sen vaste saadaan summaamalla sarjakehitelmän termejä vastaavat vasteet yhteen (termejä vastaava vaste voidaan ratkaista kohdan 3.1 perusteella). Jaksollinen (jaksonaika T_p), ja jakson välillä integroitava funktio voidaan kehittää Fourier-sarjaksi [12]. Herätteen Fourier-sarja on [6]

$$p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \bar{\omega}_n t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \bar{\omega}_n t, \quad (11)$$

missä

$$n \in \{1, 2, 3, \dots\},$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T_p} \int_{T_p 0}^{T_p} p(t) dt, \\ a_n &= \frac{1}{T_p} \int_{T_p 0}^{T_p} p(t) \cos n \bar{\omega}_1 t dt, \\ b_n &= \frac{1}{T_p} \int_{T_p 0}^{T_p} p(t) \sin n \bar{\omega}_1 t dt, \\ \bar{\omega}_1 &= \frac{2\pi}{T_p}. \end{aligned} \quad (12)$$

Vakaan tilan vaste Fourier-sarjamuotoisesta herätteestä saadaan kaavan (9) perusteella laskemalla sini- ja kosinitermien vasteet yhteen. Siten

$$\begin{aligned} x &= \frac{a_0}{k} + \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n 2\xi\beta_n + b_n(1-\beta_n^2)}{(1-\beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2} \sin n \bar{\omega}_1 t \\ &+ \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(1-\beta_n^2) - b_n 2\xi\beta_n}{(1-\beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2} \cos n \bar{\omega}_1 t, \end{aligned} \quad (13)$$

missä

$$\beta_n = \frac{\bar{\omega}_n}{\omega} = \frac{n \bar{\omega}_1}{\omega}. \quad (14)$$

Yhtälöstä (13) voidaan määrittää vaste jaksollisille herätteille, mutta sillä ei voida käsitellä jaksottomia, esim. impulssimaisia herätteitä. Jaksottomia herätteitä voidaan käsitellä esim. *Fourier-muunnosten* avulla.

3.1.2 Fourier-muunnetun liikeyhtälön ratkaisu

Sini- ja kosinitermeillä esitetty Fourier-sarja voidaan esittää eksponentti-muodossa [12]

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in \bar{\omega}_1 t}, \quad (15)$$

missä

$$c_n = \frac{1}{T_p} \int_{T_p 0}^{T_p} p(t) e^{-in \bar{\omega}_1 t} dt. \quad (16)$$

Tarkastelemalla Fourier-sarjaa (15) infinitesimaalisella jaksonajalla voidaan johtaa ns. *Fourier-integraalit* [12]

$$P(\bar{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{-i\bar{\omega}t} dt \quad (17)$$

ja

$$p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\bar{\omega}) e^{i\bar{\omega}t} d\bar{\omega}. \quad (18)$$

Yhtälöä (17) kutsutaan Fourier-muunnokseksi ja yhtälöä (18) Fourier-käänteismuunnokseksi. Fourier-integraalit muodostavat *Fourier-muunnosparin*. Välttämätön ehto Fourier-käänteismuunnoksen olemassaololle on [6], että

$$\int_{-\infty}^{\infty} |p(t)| dt \text{ on äärellinen.} \quad (19)$$

Tyypillinen heräte, jonka laskentamallissa katsotaan vaikuttavan systeemin tietyn äärellisen ajan T_p , täyttää edellisen ehdon. Tällöin herätteen Fourier-muunnos on

$$P(\bar{\omega}) = \int_0^{T_p} p(t) e^{-i\bar{\omega}t} dt. \quad (20)$$

Funktion $x(t)$ derivaatan Fourier-muunnos saadaan yhteydestä [5]

$$X[\dot{x}(t)] = i\bar{\omega}X[x(t)]. \quad (21)$$

Kun tarkastellaan vakaan tilan vaihetta (eli vasteen ja herätteen taajuudet ovat samat), saadaan kaavan (21) perusteella liikeyhtälön (5) Fourier-muunnetuksi muodoksi

$$(-\bar{\omega}^2 m + i\bar{\omega}c + k)X(\bar{\omega}) = P(\bar{\omega}). \quad (22)$$

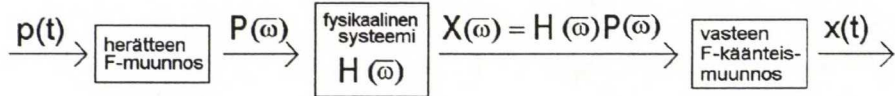
Yhtälö (22) voidaan myös esittää muodossa

$$X(\bar{\omega}) = H(\bar{\omega})P(\bar{\omega}), \quad (23)$$

missä H on kompleksinen *taajuusvastefunktio*. Tarkasteltavan systeemin vakaan tilan taajuusvastefunktio on kaavojen (22) ja (23) perusteella

$$H(\bar{\omega}) = \frac{1}{k - \bar{\omega}^2 m + i\bar{\omega}c} = \frac{1}{k} \frac{1}{1 - \beta^2 + i2\xi\beta}. \quad (24)$$

Jos systeemin taajuusvastefunktio tunnetaan, saadaan vasteen Fourier-muunnos kertomalla taajuusvastefunktiolla herätteen Fourier-muunnos. Vasteen määrittämiseksi ajan funktiona on suoritettava Fourier-käänteismuunnos. Prosessi voidaan esittää kaaviomaisesti muodossa



Fourier-muuntamista kutsutaan myös siirtymiseksi *taajuustasoon* ja käänteismuuntamista siirtymiseksi *aikatasoon*.

3.2 Usean vapausasteen värähtelysteemi

Oletetaan värähtelysteemin vaimennusvoimat nopeuteen verrannollisiksi. Usean vapausasteen värähtelysteemin liikeyhtälö voidaan voimatasapainon perusteella esittää matriisimuodossa [6]

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{p(t)\}, \quad (25)$$

missä $[m]$ on massa-, $[c]$ vaimennus- ja $[k]$ jäykkyysmatriisi. $\{x\}$ on siirtymä- ja $\{p(t)\}$ kuormitusvektori. Matriisin koko on $n \times n$, missä n on systeemille mahdollisten vapausasteiden määrä. Matriisien alkiot m_{ij} , c_{ij} ja k_{ij} ovat massa-, vaimennus- ja jäykkyyskertoimia ja ne määritellään [6] seuraavasti:

$$\begin{aligned} m_{ij} &= \text{voima, joka kohdistuu koordinaattipisteeseen } i \\ &\quad \text{koordinaattipisteeseen } j \text{ yksikkökihtiyydestä,} \\ c_{ij} &= \text{voima, joka kohdistuu koordinaattipisteeseen } i \\ &\quad \text{koordinaattipisteeseen } j \text{ yksikkönopeudesta,} \\ k_{ij} &= \text{voima, joka kohdistuu koordinaattipisteeseen } i \\ &\quad \text{koordinaattipisteeseen } j \text{ yksikkösiirtymästä.} \end{aligned} \quad (26)$$

Jos vaimennus- ja hitausvoimat oletetaan nolliksi ja kuormitus ajasta riippumattomaksi, palautuu liikeyhtälö ajasta riippumattomaan statiikan yhtälöön $[k]\{x\} = \{p\}$.

Formuloitaessa probleema elementtimenetelmän mukaisesti on jäykkyysmatriisi $[k]$ yksittäisten elementtien jäykkyysmatriisien kombinaatio. Normaali voimien vaikutus voidaan ottaa huomioon summaamalla elementin jäykkyysmatriisiin geometrinen jäykkyysmatriisi $[k_g]$. Hitausvoimia aiheuttavan massan oletetaan yleensä keskittyneen elementtien solmupisteisiin, jolloin $[m]$ on diagonaalinen.

3.2.1 Vapaan vaimentamattoman värähtelyn ominaismuodot ja -taajuudet

Asettamalla $[c] = 0$ ja $\{p(t)\} = 0$ liikeyhtälö (25) saa muodon

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = 0. \quad (27)$$

Yhtälön (27) ratkaisu saadaan olettamalla vapausasteiden liiketilaksi harmoninen liike, $x_i = x_{oi} \sin(\omega t + \phi_i)$, missä ϕ_i on vapausastekohtainen vakio (ns. *vaihekulma*). Sijoittamalla x_i yhtälöön (27) saadaan yhtälö

$$[k - \omega^2 m] \{x_0\} = 0, \quad (28)$$

jonka ratkaisu palautuu ominaisarvoyhtälöön, tai vaihtoehtoisesti determinantin nollakohtien määrittämiseen

$$[k]m^{-1} \{x\}_i = \omega_i^2 \{x\}_i \Leftrightarrow |k - \omega^2 m| = 0, \quad (29)$$

missä yläindeksi -1 tarkoittaa käänteismatriisia, $\{x\}_i$ on i:s ominaisvektori ja ω_i^2 i:s ominaisarvo. Ominaisarvot ovat systeemille mahdollisten kulma-
taajuuksien neliöitä. Ominaisarvot ovat positiivisia reaalilukuja reunaehdoil-
taan määrätyle värähtelysteemille [6]. Ominaisarvot indeksoidaan suu-
ruusjärjestykseen siten, että pienimmän arvon indeksi on yksi jne. Omi-
naisvektorit eivät ole yksikäsitteisiä, vaan ainoastaan niiden alkioiden
suhteet voidaan ratkaista. Ominaisvektorista käytetään myös nimitystä
ominaismuoto $\{\phi\}_i$, ne kuvaavat rakenteen siirtymätilaa. Käytännössä
ominaisarvot ja -muodot lasketaan suurten yhtälöryhmien tapauksessa eri-
laisilla iteraatiomenetelmillä.

Ominaismuodoista muodostettua matriisia

$$[\Phi] = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_n], \quad (30)$$

kutsutaan *ominaismuotomatriisiksi*. Ominaismuodoilla ja siten myös omi-
naismuotomatriisilla, on käyttökelpoisia ns. *ortogonaalisuus*-ominaisuuksia
liikeyhtälön (25) ratkaisemiseksi. Voidaan osoittaa [5], että

$$[\Phi]^T [m] [\Phi] = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & M_n \end{bmatrix} = \text{diag}[M_1, M_2, \dots, M_n], \quad (31)$$

$$[\Phi]^T [k] [\Phi] = \text{diag}[K_1, K_2, \dots, K_n],$$

missä M_i :t ovat ns. *yleistettyjä* massoja, K_i :t *yleistettyjä* jäykkyyksiä ja
yläindeksi T tarkoittaa matriisin transpoosia. Tällöin siis liikeyhtälön (25)
massa- ja jäykkymatriisi voidaan diagonalisoida kertomalla vasemmalta
ominaismuotomatriisin transpoosilla ja oikealta ominaismuotomatriisilla.

3.2.2 Suhteellinen vaimennus

Jos liikeyhtälön (25) molemmat puolet kerrotaan vasemmalta ominais-
muotomatriisin transpoosilla, ja $\{x\}$ esitetään ominaismuotomatriisin ja
yleistetyn koordinaattivektorin $\{Y\}$ tulona

$$\{x\} = [\Phi] \{Y\}, \quad (32)$$

saa liikeyhtälö muodon

$$[M]\{\ddot{Y}\} + [\Phi]^T[c][\Phi]\{\dot{Y}\} + [K]\{Y\} = [\Phi]^T\{p(t)\} = \{P\}, \quad (33)$$

missä ominaismuotomatriisin transpoosilla kerrottua kuormavektoria, *yleistettyä kuormaa*, on merkitty $\{P\}$:llä. Kaavan (33) muut termit ovat diagonaalisia paitsi vaimennustermi. Yhtälön (32) oikean puolen koordinaateilla on siten saatu diagonalisoitua massa ja jäykkyysmatriisi, ko. koordinaatteja kutsutaan tämän ominaisuutensa vuoksi myös *normaalkoordinaateiksi*.

Jos vaimennustermi annetaan verrannollisena massa- ja jäykkyysmatriisiin, ns. *suhteellisena* vaimennuksena, myös vaimennustermi diagonalisoituu [5], ja tuloksena saadaan liikeyhtälöistä (25) erotettua n kappaletta riippumattomia differentiaaliyhtälöitä, jotka voidaan ratkaista kohdan 3.1 mukaisesti. Vaste saadaan tällöin yleistetyillä koordinaateilla. Vaste alkuperäisillä koordinaateilla saadaan kertomalla ominaismuotomatriisilla yleistetty koordinaattivektori (yhtälö 32). Esimerkki suhteellisesta vaimennuksesta on *Rayleigh*:n vaimennus [5], joka esitetään muodossa

$$[c] = a[m] + b[k], \quad (34)$$

missä a ja b ovat vakioita. Yhtälön (33) vaimennustermi on tällöin kahden diagonaalimatriisin summa yhtälön

$$[\Phi]^T[c][\Phi] = a[M] + b[K], \quad (35)$$

mukaisesti. Jos vaimennus on suhteellista, saa liikeyhtälön i:s differentiaaliyhtälö muodon

$$M_i\ddot{Y}_i + C_i\dot{Y}_i + K_iY_i = P_i, \quad (36)$$

missä C_i on *yleistetty vaimennustermi*. C_i voidaan yhteyksien (6) perusteella lausua kriittisen vaimennussuhteen avulla muodossa

$$C_i = 2\xi_i\omega_i M_i, \quad (37)$$

Tämä ns. *moodikohtainen* vaimennus on useasti käyttökelpoinen tapa, jolla voidaan ottaa huomioon rakenteen mekaaninen vaimennus. Vaimennussuhde voidaan arvioida esim. logaritmisien dekrementtien ja vaimennussuhteen yhteydestä (7).

3.2.3 Vapausasteiden rajoittaminen

Tarvittavan laskentakapasiteetin- ja pyöristysvirheiden pienentämiseksi on käytännöllistä rajoittaa ratkaistavan yhtälöryhmän kokoa. Yleensä rakenteen alimmat ominaismuodot ja -taajuudet määräävät systeemin vasteen (ylimpiä ominaistajuuksia vastaavien ominaismuotojen amplitudit ovat pieniä), jolloin vaste määräytyy alimpien ominaismuotojen summana.

Jos ominaismuotomatriisi on määritetty, voidaan sen avulla rajoittaa vapausasteita sisällyttämällä siihen ainoastaan m ensimmäistä ($m < n$) ominaismuotovektoria. Tällöin ominaismuotomatriisin dimensio on $n \times m$ ja matriisikertolaskun mukaisesti saadaan liikeyhtälön (25) termien dimensioksi

$$\begin{aligned}
[\bar{\Phi}]_{mxn}^T [m]_{n \times n} [\bar{\Phi}]_{n \times m} &= [\bar{M}]_{m \times m}, \\
[\bar{\Phi}]_{mxn}^T [k]_{n \times n} [\bar{\Phi}]_{n \times m} &= [\bar{K}]_{m \times m}, \\
[\bar{\Phi}]_{mxn}^T [c]_{n \times n} [\bar{\Phi}]_{n \times m} &= [\bar{C}]_{m \times m}, \\
[\bar{\Phi}]_{mxn}^T \{p(t)\}_{n \times 1} &= \{\bar{P}\}_{m \times 1}.
\end{aligned} \tag{38}$$

Yhtälöryhmän koon rajoittamisessa syntyvä virhe riippuu poisjätettävien korkeampien ominaismuotojen vastaavista amplitudeista. Esimerkiksi sillan jäykistyspalkin värähtelyt voidaan kuvata tarkasti 1...2 alimmalla ominaismuodolla liikesuuntaa kohden.

3.2.4 Moodi-summausmenettely

Kohdissa 3.2.1-3.2.4 esitettyä laskenta-algoritmia kutsutaan *moodi-summausmenettelyksi* (*mode superposition procedure*). Menetelmä on käyttökelpoinen suurten yhtälöryhmien käsittelyyn. Menettely on vaiheittain seuraava:

1. Ratkaistaan liikeyhtälö, kun vaimennus ja kuorma ovat nollija: oletetaan harmoninen liike, josta seuraa ominaisarvotehtävä - määritetään tarvittava määrä alimpia ominaisarvoja ja -vektoreita (esim. iteratiivisilla laskentamenetelmillä).
2. Kootaan ominaismuotomatriisi ominaisvektoreista.
3. Diagonalisoidaan massa- ja jäykkyyssmatriisi ominaismuotomatriisin avulla.
4. Oletetaan suhteellinen vaimennus, jolloin diagonaalisen vaimennusmatriisin termit määräytyvät moodikohtaisen vaimennussuhteen perusteella.
5. Määritetään vasteet riippumattomille (yhden vapausasteen) liikeyhtälöille. Tuloksena saadaan vaste yleistetyillä koordinaateilla.
6. Systeemin vaste saadaan kertomalla ominaismuotomatriisilla yleistetty koordinaattivektori.

Menetelmää sovelletaan luvun 5 laskentamallissa.

3.2.5 Liikeyhtälöiden ratkaisu taajuustasossa

Fourier-muuntamalla liikeyhtälön (25) matriisien termit derivointikaavan (21) mukaisesti ja tarkastelemalla vakaan tilan vaihetta voidaan liikeyhtälö esittää muodossa [7]

$$(-\bar{\omega}^2[m] + i\bar{\omega}[c] + [k])\{X(\bar{\omega})\} = \{P(\bar{\omega})\}. \tag{39}$$

Vasemman puolen kerroinmatriisi, ns. kompleksinen *dynaaminen jäykkyyssmatriisi*, on

$$[B(\bar{\omega})] = -\bar{\omega}^2[m] + i\bar{\omega}[c] + [k]. \quad (40)$$

Systeemin kompleksinen taajuusvastematriisi on dynaamisen jäykkyyss-matriisin käänteismatriisi *) [7]

$$[H(\bar{\omega})] = [B(\bar{\omega})]^{-1}. \quad (41)$$

Systeemin vasteen Fourier-muunnos on siten yhtälöä (23) vastaten

$$\{X(\bar{\omega})\} = [H(\bar{\omega})]\{P(\bar{\omega})\}. \quad (42)$$

Kun systeemin kompleksinen taajuusvastematriisi tunnetaan, saadaan vasteen Fourier-muunnos matriisikertolaskulla. Jos ollaan kiinnostuneita vasteen aikariippuvuudesta, on suoritettava vasteen käänteismuunnos.

Fourier-muunnos muuntaa alkuperäisen differentiaaliyhtälöryhmän algebraliseksi yhtälöryhmäksi, joka voidaan ratkaista matriisilaskun sääntöjen mukaisesti. Fourier-muunnosten suorittaminen vaatii tehokkaan numeerisen laskenta-algoritmin. Tällainen on ns. nopea Fourier-muunnos, FFT. FFT-muunnoksen suorittavilla elektronisilla mittauslaitteilla voidaan todellisesta rakenteesta määrittää herätteen tai vasteen Fourier-muunnos ja edelleen systeemin kompleksinen taajuusvastefunktio. Mitattujen taajuusvastefunktioiden perusteella voidaan arvioida laskenta- ja rakennemallien tarkkuutta.

Dynaamisen analyysin suorittaminen taajuustasossa (eli Fourier-muunnetuilla liikeyhtälöillä) on toisinaan edullista, kun pyritään mahdollisimman tarkkaan laskentaan. Differentiaaliyhtälöryhmän ratkaisu helpottuu ja tarkentuu erityisesti silloin, kun vaimennusta ei mallinneta suhteellisen vaimennuksena (vaimennusmatriisi on täysi). Tällainen tilanne esiintyy esim. aerodynaamisen vaimennuksen ja laukkaamisilmion tarkemmassa mallinnuksessa. Lisäksi voidaan liikeyhtälöissä ottaa huomioon erikois-kysymyksiä, kuten köysien jäykkyyden riippuvuus taajuudesta [7].

*) Kompleksisen matriisin $[B]$ käänteismatriisi määritellään samoin kuin reaaliarvoisen matriisin eli $[B][B]^{-1} = [B]^{-1}[B] = [I]$, missä $[I]$ on reaalinen yksikkö-matriisi. Eräs tapa kääntää kompleksinen matriisi on esittää sen alkiot, kompleksiluvut, matriisimuodossa

$$c = a + bi \equiv \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \quad (43)$$

ja soveltaa reaaliarvoisten matriisien kääntöalgoritmeja.

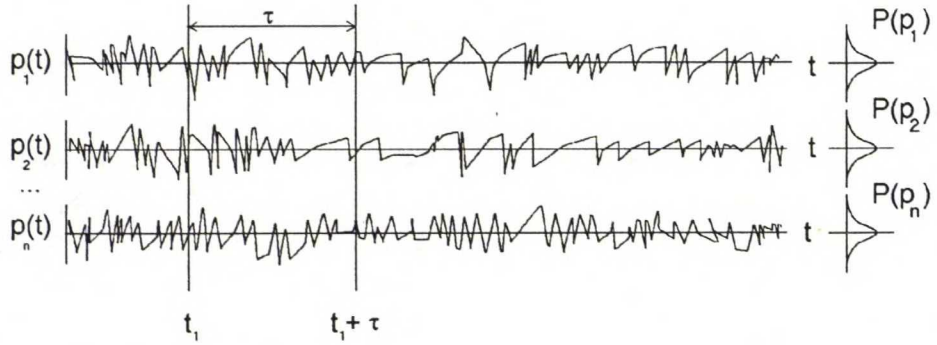
3.3 Satunnaisvärähtelyt

Satunnaisia herätteitä voidaan käsitellä tilastomatematiikan malleilla. Vaikka heräte lyhyellä aikajaksolla vaikuttaisi täysin satunnaiselta, pidemmällä ajanjaksolla havaitaan yleensä jonkinasteista tilastollista riippuvuutta. Dynaamisessa analyysissä erityisen kiinnostuksen kohteena ovat herätteen mahdolliset jaksot sekä niiden esiintymistodennäköisyys. Satunnaisvärähtelyjen matemaattisen mallintamisen perustana on herätteestä havaitut tilastolliset riippuvuudet sekä niitä kuvaavat tunnusluvut. Mallin ennustarvo paranee mitä enemmän herätteestä on tilastoitua tietoa.

Otetaan käyttöön seuraavat tunnusluvut [13]

$$\begin{aligned}
 \text{aikakeskiarvo } \langle p(t) \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt, \\
 \text{neliön aikakeskiarvo } \langle p(t)^2 \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T p(t)^2 dt, \\
 \text{varianssi } \sigma^2 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [p(t) - \langle p(t) \rangle]^2 dt = \langle p(t)^2 \rangle - \langle p(t) \rangle^2, \\
 \text{keskihajonta } \sigma &= \sqrt{\sigma^2}.
 \end{aligned} \tag{44}$$

Tilastollisten riippuvuuksien määrittämiseksi on herätteestä mitattava amplitudi useaan kertaan (kuva 12). Yhtä mittauskertaa kutsutaan otokseksi. Otosten kesto (τ) pidetään vakiona.



Kuva 12. n otosta herätteestä kun otoksen kesto on vakio τ .

Jos otoksista yksittäisellä ajanhetkellä t_1 mitattu keskiarvo (s) on mittauksen suoritusajankohdasta riippumaton, on heräte *stationaarinen*, eli kuvan 12 tapauksessa

$$s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i(t_1) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i(t_1 + \tau), \quad \tau = -\infty \dots \infty. \tag{45}$$

Jos tämä keskiarvo yhtyy yksittäisistä otoksista laskettuihin aikakeskiarvoihin, on heräte *erkoodinen*, eli

$$s = \langle p_i(t) \rangle, \quad i=1 \dots n. \quad (46)$$

Satunnaisvärähtelyjen mallintamisen yksinkertaistamiseksi seuraavassa tarkastelussa oletetaan, että heräte on stationaarinen ja erkoodinen. Kuvan 12 oikeaan reunaan piirretyt kuvaajat esittävät herätteen *todennäköisyysjakaumien tiheysfunktioita*. Tiheysfunktiot normeerataan siten, että niiden integraali miinus äärettömästä äärettömään on yksi. Sen mukaan, noudattavatko nämä tiheysfunktiot jotain yleisesti tunnettua jakaumaa, voidaan jakauman nimeä käyttää kuvaamaan satunnaisprosessin luonnetta, esim. stationaarinen Gaussin prosessi jne.

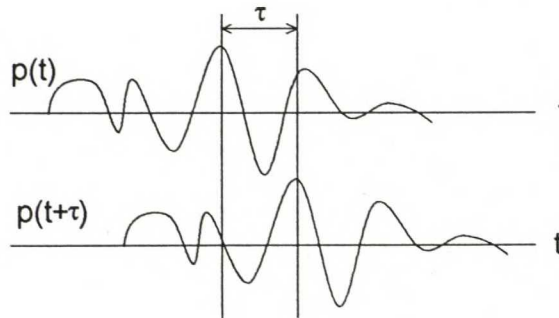
3.3.1 Korrelaatio ja tehospektrin tiheysfunktio

Korrelaatio-käsite kuvaa kahden suureen samanlaisuutta. Korrelaatio kahdelle herätteelle $p_1(t)$ ja $p_2(t)$ saadaan laskemalla herätteiden tulon aikakeskiarvo, $\langle p_1(t)p_2(t) \rangle$. Jos herätteet ovat samantyyppisiä tai identtisiä, on ilmeistä, että aikakeskiarvo on suurempi kuin erityyppisten herätteiden tapauksessa, koska erityyppisillä herätteillä tulo $p_1(t)p_2(t)$ vaihtaa useammin etumerkkiä ja pienentää siten aikakeskiarvoa.

Oletetaan, että kaksi herätettä ovat muuten identtiset, mutta että niiden vaikutusajankohdan välillä on vakio aikaero (kuva 13). Herätteen *autokorrelaatio* määritellään [5] kaavalla

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} p(t)p(t+\tau) dt = \langle p(t)p(t+\tau) \rangle. \quad (47)$$

Tällöin, jos $\tau = 0$, on herätteillä *täydellinen* korrelaatio ja $R(0) = \langle p(t)^2 \rangle$. τ :n muuttuessa korrelaatio pienenee. Jos heräte on jaksollinen, jaksonaika T_p , havaitaan jälleen täydellinen korrelaatio, kun $\tau = T_p$. Autokorrelaation arvot eri τ :n arvoilla muodostavat autokorrelaatiofunktion. Autokorrelaatiofunktion $R(\tau)$ voidaan etsiä herätteeseen "piilotettuja" jaksollisuuksia.



Kuva 13. Kaksi identtistä herätettä, vaikutusajankohdan välillä aikaero τ .

Autokorrelaatiofunktion Fourier-muunnosta

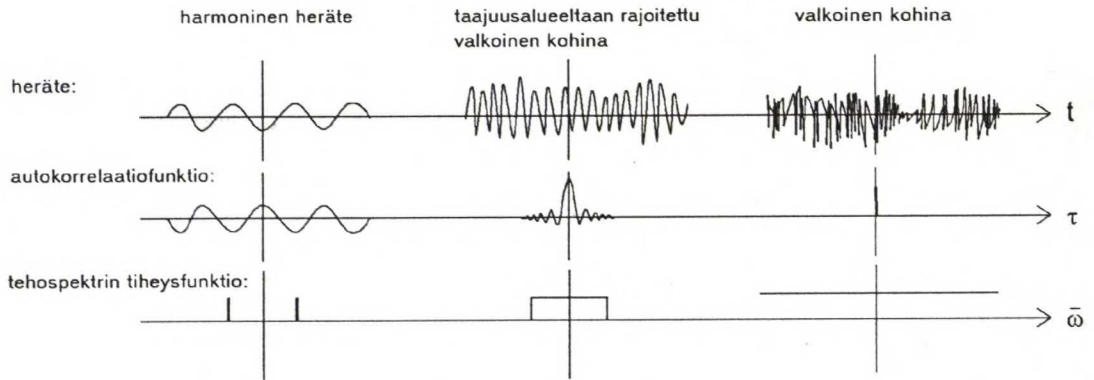
$$S(\bar{\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\bar{\omega}\tau} d\tau, \quad (48)$$

kutsutaan *tehospektrin tiheysfunktioksi*. Autokorrelaatiofunktio saadaan tästä Fourier-käänteismuunnoksella [13]

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\bar{\omega}) e^{i\bar{\omega}\tau} d\bar{\omega}. \quad (49)$$

Yhtälöitä (48) ja (49) nimitetään *Wiener-Khintitchinen* yhtälöiksi ja ne esittävät R:n ja S:n välisen riippuvuuden.

Valkoinen kohina (*white noise excitation*) on herätetyyppi, jossa esiintyy kaikkia taajuuksia yhtä useasti satunnaisilla amplitudeilla. Tällaisen herätteen tehospektrin tiheys on vakio, kun taas autokorrelaatiofunktio on nolla muualla paitsi pisteessä $\tau = 0$. Autokorrelaatiofunktion ja tehospektrin tiheyden kuvaajia eri kuormitustyypeillä on havainnollistettu kuvassa 14.



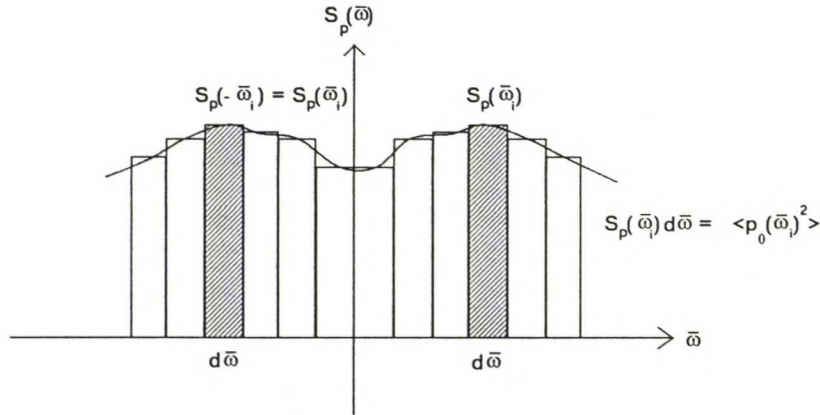
Kuva 14. Autokorrelaatiofunktio ja tehospektrin tiheysfunktio herätetyyppien alkeistapauksilla.

Autokorrelaatiofunktion "pinta-ala" kuvaa satunnaisprosessin (esim. tuulen puuskaisuuden) luonnetta - eräs autokorrelaatiofunktiolle määritelty tunnusluku on korrelaation skaala (*correlation scale*) [13]

$$r_k = \int_0^{\infty} |R_k(\tau)| d\tau, \quad (50)$$

missä R_k on normeerattu (pinta-ala = 1) autokorrelaatiofunktio. Herätteen tapauksessa suuri r_k :n arvo ennakoi taajuusalueeltaan kapeakaistaista herätettä.

Dynaamisen analyysin kannalta tärkeä alkeistapaus on harmonisen herätteen tehospektrin tiheysfunktio (kuva 14, vasen alakulma). Herätettä, joka sisältää kaikkia tarkasteluvälin taajuuksia voidaan kuvata jatkuvalla tehospektrin tiheysfunktiolla. Herätteen tehospektrin tiheysfunktion arvo tietyllä taajuudella on verrannollinen herätteen ko. taajuuden neliön aikakeskiarvoon (kuva 15). Ominaisuutta sovelletaan tuulikuorman dynaamisen osan mallintamisessa (kohta 4.2).



Kuva 15. Herätteen tehospektrin jatkuva tiheysfunktio.

Kahden eri herätteen *ristikorrelaatio* määritellään [5] kaavalla

$$R_{ij}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} p_i(t) p_j(t+\tau) dt = \langle p_i(t) p_j(t+\tau) \rangle. \quad (51)$$

Ristikorrelaation Fourier-muunnos (*cross-spectral density*) määritellään kaavalla [5]

$$S_{ij}(\bar{\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{ij}(\tau) e^{-i\bar{\omega}\tau} d\tau. \quad (52)$$

Jos herätteet ovat riippumattomia toisistaan, on ristikorrelaation ja vastaavan tehospektrin tiheysfunktion arvo nolla. Värähtelysteemiin kohdistuu tyypillisesti useita herätteitä, jotka voivat olla riippuvia toisistaan. Tehospektrin tiheysfunktioiden arvot eri herätteiden välillä voidaan esittää systemaattisesti matriisimuodossa. Otetaan herätteen tehospektrin tiheysmatriisille käyttöön merkintä

$$[S_p(\bar{\omega})] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n1} & S_{n2} & \dots & S_{nn} \end{bmatrix}, \quad (53)$$

missä lävistäjäalkiot vastaavat autokorrelaatio- ja muut alkio ristikorrelaatiofunktion Fourier-muunnosta. Matriisi on diagonaalinen, jos herätteet p_i

ja p_i ovat toisistaan riippumattomia kaikilla i :n ja j :n arvoilla. Matriisin alkioille pätevät yhteydet [13]

$$\begin{aligned} S_{ii}(\omega) &= S_{ii}(-\omega), \\ S_{ij}(\omega) &= S_{ji}^*(\omega), \\ \frac{dS_{ij}(\omega)}{d\omega} &= S_{x^{(1)}}(\omega) = \omega^2 S(\omega), \end{aligned} \quad (54)$$

missä yläindeksi * tarkoittaa kompleksikonjugaattia. Aikaderivaatan (merkin-
tä $x^{(1)}$) olemassaolon ehtona on tehospektrin tiheysfunktion jatkuvuus ja
differentioituvuus.

3.3.2 Systeemin vaste stokastiseen herätteeseen, spektrianalyysi

Stokastisten prosessien yhteydessä vastetta ei voida yksikäsitteisesti
määrittää - sen sijaan voidaan laskea vasteesta samoja tunnuslukuja, joita
tiedetään herätteestä.

Lineaarisen systeemin tapauksessa on käytännöllistä jakaa kuormitus
staattiseen ja dynaamiseen osaan siten, että dynaamisen osan komponent-
tien aikakeskiarvot ovat nollia. Systeemin vaste saadaan staattisen osan ja
dynaamisen osan komponenttien tunnuslukujen perusteella määritetyn
dynaamisen osan summana. Dynaaminen osa arvioidaan tyypillisesti
vasteen keskihajonnan ja maksimiarvojen jakauman perusteella.

Jos herätteen aikakeskiarvo on nolla, on myös vasteen aikakeskiarvo nolla.
Herätteen ja vasteen neliöiden aikakeskiarvot ovat nollasta eroavia. Tehos-
pektrin tiheysfunktio kuvaa suureen neliön aikakeskiarvoa taajuuden
funktiona.

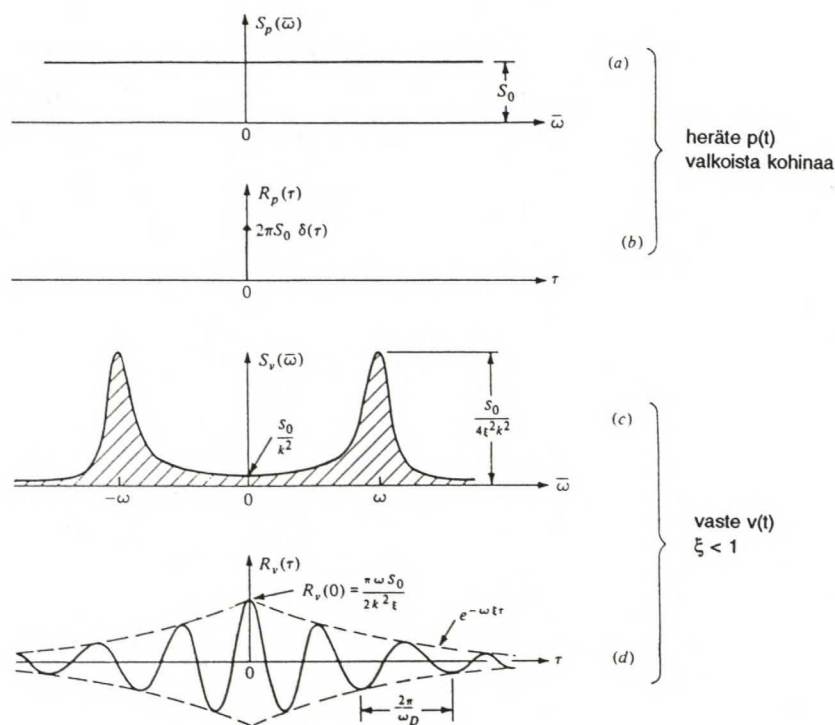
Jos herätteen autokorrelaatiofunktio tai tehospektrin tiheysfunktio tunne-
taan, voidaan vasteen vastaavat funktiot määrittää [6]. Yhden vapausas-
teen (kohdan 3.1 mukaisen) värähtelysysteemin herätteen ja vasteen
tehospektrin tiheysfunktion (S_x) välillä on yhteys [6]

$$S_x(\bar{\omega}) = H(\bar{\omega})^* H(\bar{\omega}) S_p(\bar{\omega}) = |H(\bar{\omega})|^2 S_p(\bar{\omega}). \quad (55)$$

Vasteen tehospektrin tiheysfunktion kuvaaja voidaan määrittää laskemalla
yhtälö (55) eri taajuuksilla. S_p :n kerrointekijää nimitetään *mekaaniseksi*
admitanssiksi eli -joustavuudeksi ja se on yhtälöstä (24) laskettuna

$$|H(\bar{\omega})|^2 = \frac{1}{k^2 [1 + (4\xi^2 - 2)\beta^2 + \beta^4]}. \quad (56)$$

Vasteen autokorrelaatiofunktio saadaan yhtälön (49) mukaisesti Fourier-
käänteismuuntamalla vasteen tehospektrin tiheysfunktio. Kuvassa 16 on
havainnollistettu herätteen ja vasteen autokorrelaatiofunktion ja tehospekt-
rin tiheysfunktion yhteyttä herätteen ollessa tyypiltään valkoista kohinaa.



Kuva 16. Herätteen ja vasteen autokorrelaatio- ja tehospektrin tiheysfunktion yhteys yhden vapausasteen värähtelysysteemillä (heräte valkoista kohinaa) [6].

Tarkasteltaessa usean vapausasteen värähtelysysteemiä, jossa vaimennus on mallinnettu suhteellisenä, voidaan systeemin liikeyhtälöt palauttaa kohdan 3.2 mukaisesti riippumattomiksi yhden vapausasteen liikeyhtälöiksi. Riippumattomille liikeyhtälöille voidaan edelleen määrittää moodikohtaiset tehospektrin tiheysfunktiot yhtälöiden (55) ja (56) mukaisesti. Vasteen tehospektrin tiheysfunktiot saadaan moodikohtaisista tehospektrin tiheysfunktioista ominaismuotomatriisilla kertomalla.

Jos liikeyhtälöitä ei voida erottaa, on ratkaistava systeemin kompleksinen taajuusvastematriisi (eli käännettävä kompleksinen dynaaminen jäykkyysmatriisi). Koska suurten matriisien kääntäminen on hidasta ja matriisit on käännettävä kaikilla tarkasteltavan taajuusalueen taajuuksilla, on edullista rajoittaa systeemin kokoa moodisummausmenettelyn mukaisesti. Herätteen tehospektrin tiheysmatriisi lausuttuna yleistetyillä koordinaateilla on [13]

$$[\bar{S}_p(\bar{\omega})] = [\bar{\Phi}]^T [S_p(\bar{\omega})] [\bar{\Phi}], \quad (57)$$

ja vastaavasti kompleksinen dynaaminen jäykkyysmatriisi

$$[\bar{B}(\bar{\omega})] = [\bar{\Phi}]^T [B(\bar{\omega})] [\bar{\Phi}] = -\bar{\omega}^2 [\bar{M}] + i\bar{\omega} [\bar{\Phi}]^T [c] [\bar{\Phi}] + [\bar{K}], \quad (58)$$

missä ominaismuotomatriisia on käytetty vapausasteiden rajoittamiseen.

Kompleksinen taajuusvastematriisi yleistetyillä koordinaateilla on yhtälön (41) mukaisesti

$$[\bar{H}(\bar{\omega})] = [\bar{B}(\bar{\omega})]^{-1}. \quad (59)$$

Vasteen ja herätteen tehospektrin tiheysmatriisien välillä on yhteys [13]

$$[\bar{S}_x(\bar{\omega})] = [\bar{H}(\bar{\omega})][\bar{S}_p(\bar{\omega})][\bar{H}(\bar{\omega})]^T. \quad (60)$$

Kun systeemin taajuusvastematriisi on ratkaistu, saadaan vasteen tehospektrin tiheysmatriisi yleistetyillä koordinaateilla matriisikertolaskuilla. Vasteen tehospektrin tiheysmatriisi rakennekoordinaatistossa saadaan yhteydestä [13]

$$[S_x(\bar{\omega})] = [\Phi][\bar{S}_x(\bar{\omega})][\Phi]^T. \quad (61)$$

Laskemalla yhtälöt (60) ja (61) tarkasteltavan taajuusalueen eri taajuuksilla voidaan määrittää vasteen tehospektrin tiheysfunktion kuvaajat tarkasteltaville vapausasteille. Menettelyä nimitetään *spektrianalyysiksi*.

3.3.3 Tehospektrin tiheysfunktion todennäköisyystulkinta

Herätteen tai vasteen varianssi on tehospektrin tiheysfunktion "pinta-ala" eli integraali yli taajuusalueen [5]

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\bar{\omega}) d\bar{\omega}. \quad (62)$$

Autokorrelaatiofunktioita vastaava tehospektrin tiheysfunktio on parillinen funktio kaavan (54) mukaisesti, jolloin integraalin laskenta yksinkertaistuu. Nopeuden ja kiihtyvyyden varianssit saadaan derivointikaavan (54) perusteella

$$\begin{aligned} \sigma_{x^{(1)}}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\omega}^2 S_x(\bar{\omega}) d\bar{\omega}, \\ \sigma_{x^{(2)}}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\omega}^4 S_x(\bar{\omega}) d\bar{\omega}. \end{aligned} \quad (63)$$

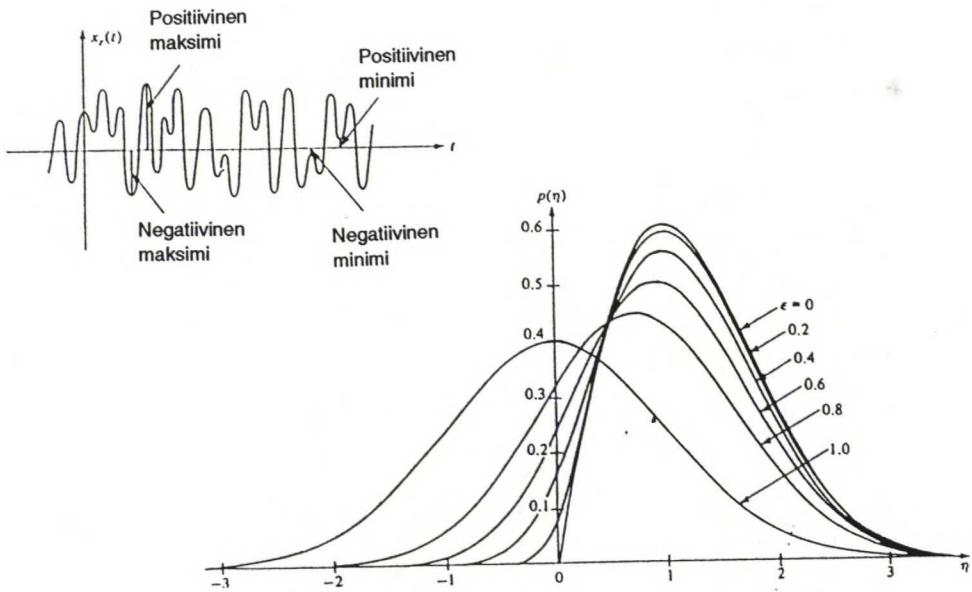
Olettamalla vasteen todennäköisyysjakauman tyyppi voidaan tehospektrin tiheysfunktioista arvioida todennäköisyyksiä vasteen maksimiarvoille. Oletetaan seuraavassa tarkastelussa vasteen dynaaminen osa *normaalijakautuneeksi* (Gaussin jakauma) aikakeskiarvolla nolla.

Otetaan käyttöön merkinnät

$$\eta = \frac{x(t)}{\sigma_x},$$

$$\epsilon^2 = 1 - \frac{\sigma_{x^{(2)}}^2}{\sigma_x \sigma_{x^{(4)}}}. \quad (64)$$

Vasteen maksimiarvojen todennäköisyyden tiheysfunktio noudattaa tällöin kuvan 17 mukaista jakaumaa [6]. Parametri ϵ voidaan määrittää esim. vasteen tehospektrin tiheysfunktioista S_x : $\epsilon = 2/3$, kun S_x on vakio, ja nolla harmonisen liikkeen S_x :lle. Kuvan 17 jakauma yhtyy *Rayleigh*:n jakaumaan ϵ :n arvolla nolla ja Gaussin jakaumaan ϵ :n arvolla 1.



Kuva 17. Vasteen maksimiarvojen todennäköisyyden tiheysfunktio parametrin ϵ eri arvoilla.

Kuvan 17 mukaista maksimin arvoa tarkasteltavalla aikavälillä sanotaan ääriarvoksi. Ääriarvot (x_e) noudattavat edellisillä oletuksilla todennäköisyysjakaumaa [6]

$$\text{Todennäköisyys}(x_e < x) = \exp\left[-vT \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right)\right],$$

$$\text{missä } v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\sigma_{x^{(4)}}^2}{\sigma_x^2}} \quad (65)$$

on tehollinen taajuus ja T tarkasteltava aikaväli. Kun tarkastellaan rakenteen vastetta tuulikuormalle, T on tyypillisesti 10 min tai 1h eli tuulen keskinopeuden mittausaika. Staattiset epästabiiliusilmiöt tapahtuvat välittö-

mästi rajakuorman saavuttamisen myötä, joten kriittinen arvo näiden stabiiliusilmiöiden suhteen määräytyy todennäköisyysjakauman (65) ja sallitun vaurioitumistodennäköisyyden perusteella.

Kaavan 65 mukaisesta jakaumasta on kehitetty muita dynaamiseen analyysiin soveltuvia ääriarvojen todennäköisyysjakaumia, esimerkkinä *Gumbold*-jakauma. Käytännön dynaaminen analyysi voidaan suorittaa useasti ääriarvojen *keskimääraisillä* arvoilla, koska yksittäinen amplitudin ääriarvo ei välttämättä johda rakenteen vaurioitumiseen.

Ääriarvojen keskiarvoksi on *A. G. Davenport* esittänyt kaavan (65) perusteella likimääräisen yhteyden [6]

$$\langle x_e \rangle = \sigma_x \left(\sqrt{2 \ln(v T)} + \frac{0,5772}{\sqrt{2 \ln(v T)}} \right). \quad (66)$$

Kaavan (66) antamien tulosten keskihajonta on [6]

$$\sigma_{\langle x_e \rangle} = \sigma_x \left(\frac{\pi}{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{2 \ln v T}} \right). \quad (67)$$

Kaavan (66) mukaisessa aproksimaatiossa vasteen dynaamisen osan ääriarvojen keskiarvo saadaan kertomalla keskihajonta tehollisesta taajuudesta riippuvalla kertoimella - kertoimen arvon ollessa suurten siltojen analyysissä tuulikuormalle tyypillisesti 3...5. Tehollinen taajuus ja vasteen keskihajonta määritetään esimerkiksi vasteen tehospektrin tiheysfunktioista. Kaavaa (66) sovelletaan luvun 5 laskentamallissa.

Tilastolliselta pohjalta määritettyjä vasteen ääriarvoja voidaan käyttää apuna arvioitaessa rakenteen varmuutta dynaamisten herätteiden suhteen ja niillä voidaan johtaa varmuuskertoimien ja staattisten korvauskuormien arvoja sallitun vaurioitumisnäköisyyden funktiona.

4. Tuulikuorma

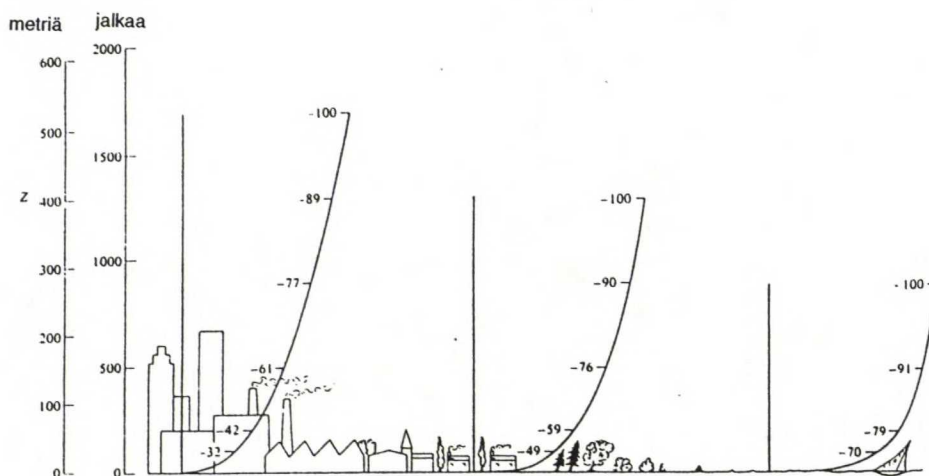
4.1 Tuuli

Luonnossa esiintyvää tuulta kuvataan tilastoitujen ominaisuuksien perusteella. Näistä insinööriteknisten sovellutusten kannalta tärkeimmät ovat:

- tuulen keskinopeus
- tuulennopeuden ääriarvo eli puuskanopeus
- tuulen keskinopeuden korkeusjakauma
- puuskien taajuuden energiaspektri
- koherenssifunktiot.

Tuulennopeudessa on havaittavissa tilastollista riippuvuutta vuorokausi- ja vuodenaikojen vaihtelujen mukaan. Nämä riippuvuudet ovat seurausta auringon säteilyenergian jaksoittaisesta jakautumisesta maapallon kierto- ja pyörimisliikkeen mukaisesti. Ilmavirtaus seuraa esim. lämpötilaerojen aiheuttamien paine-erojen tasoittumispyrkimyksistä. Ilmavirtauksen jakautumiseen vaikuttavat maapallon gravitaatiovoima ja kiertoliike sekä ilmavirtauksen ja maan välinen kitka.

Ilmavirtauksen ja maan välinen kitka pienentää virtauksen nopeutta maan lähellä ns. *gradienttikorkeuden* alapuolella. Gradienttikorkeus vaihtelee 300...600 m:iin [9] lähikilometrien maaston karheuden ja korkeussuhteiden mukaan (kuva 18). Laajoilla merialueilla gradienttikorkeus on pienimmillään.



Kuva 18. Gradienttikorkeuden ja tuulen keskinopeuden riippuvuus maastosta [9]. Tuulennopeuden arvoa gradienttikorkeudella on merkitty indeksillä 100.

Ilmavirtausta kuvaava nopeusvektori esitetään tarkastelujen yksinkertaistamiseksi keskinopeuden V_0 ja heilahtelunopeuden V_1 summana (kuva 19). Keskinopeus on vakio sillä ajanjaksolla jolla se on määritetty. Keskinopeus

aiheuttaa rakenteeseen staattisen tuulikuorman. Heilahtelunopeus kuvaa ilmavirtauksen turbulenttista ja puuskaista luonnetta. Heilahtelunopeus muuttuu suunnaltaan ja suuruudeltaan aiheuttaen tuulikuorman dynaamisen osan.

$$\mathbf{V} = \mathbf{V} + \mathbf{V} \qquad V_i(t) = u_i + v_j + w_k$$

Kuva 19. Tuulen nopeusvektorin jako komponentteihin.

4.1.1 Tuulen keskinopeus

Keskinopeuden määrittämiseksi tilastoidaan tuulennopeuksia tyypillisesti 10 m korkeudelta 10 min aikakeskiarvona (merkintä V_{10}). Toinen käytetty keskinopeuden mittausaika on yksi tunti (merkintä V_{10r}). 10 min aikakeskiarvona mitattu keskinopeus on tyypillisesti hieman suurempi kuin tunnin ajalta mitattu - suhteen ollessa n. 1,1 [27], Tuulen keskinopeuden korkeusjakauman määrittämiseksi käytetään muotoa

$$V_0(z) = V_{J-L-r}, \tag{68}$$

olevaa empiiristä yhteyttä, missä eksponentti a riippuu gradienttikorkeudesta. Keskinopeuden korkeusjakauma voidaan myös esittää kitkanopeuden (kaava 4) avulla [11] kaavalla

$$V_0(z) = \frac{u_*}{k} \ln\left(\frac{z}{z_0}\right), \tag{69}$$

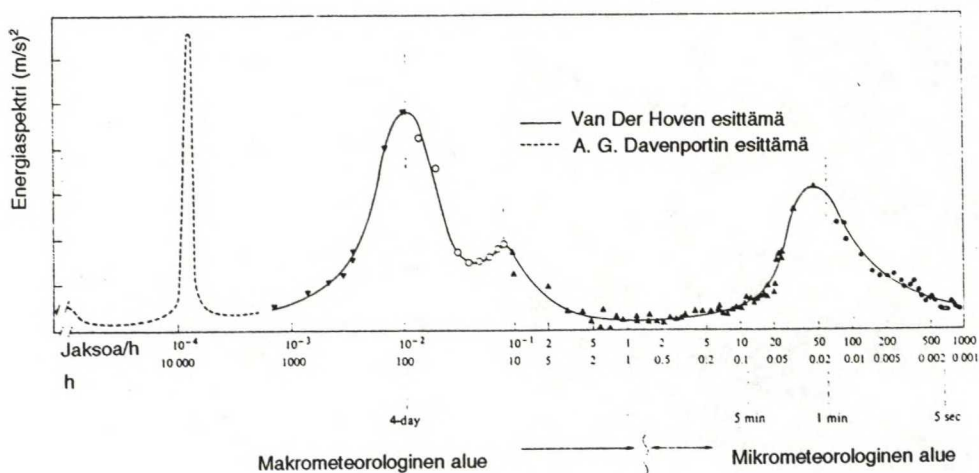
jossa u_* on kitkanopeus, k von Kármánin vakio ja z_0 maaston "karheusparametri" (*surface roughness parameter*). Von Kármánin vakiolle käytetään arvoa 0,4 ja karheusparametri riippuu maaston tyypistä ja lähialueiden korkeuseroista. Karheusparametrin arvoja on taulukoitu esim. lähteissä [18] ja [24], Karheusparametrin arvot vaihtelevat välillä 0,001 ...2,5 m. Kaavoista (68) ja (69) saadaan kitkanopeudelle likimääräinen yhteys [24]

$$u_* = \frac{V_{10}}{2.5 \ln(.10[m])} \tag{70}$$

Tuulen puuskissa esiintyvät hetkittäiset tuulennopeuden arvot ovat keskinopeutta suurempia. Puuskanopeuksia mitataan esim. 3 sekunnin aikakeskiarvona. Puuskanopeuden ja keskinopeuden suhdetta kutsutaan *puuskakertoimeksi*. Puuskakertoimen arvo on vaihtelee 1,3...2,5 maaston tyypistä riippuen [27],

4.1.2 Tuulen heilahtelunopeus

Heilahtelunopeuden muutokset ovat turbulenttisen virtauksen luonteen mukaisesti satunnaisia, joten sen ominaisuuksia voidaan kuvata tilastomatemalta pohjalta. Heilahtelunopeuden komponenttien u , v ja w aikakeskiarvot ovat nolliä. Heilahtelunopeuden komponenttien neliöiden aikakeskiarvot $\langle u^2 \rangle$, $\langle v^2 \rangle$ ja $\langle w^2 \rangle$ ovat nollasta eroavia ja verrannollisia tarkasteltavan komponentin kineettiseen energiaan kineettisen paineen kaavan (82) mukaisesti. Heilahtelunopeuden (eli puuskien) energian jakaantumista eri taajuuksille voidaan kuvata spektrillä taajuuden suhteen (kuva 20).



Kuva 20. Tuulen energiaspektri laajalla taajuusalueella [9].

Spektrissä voidaan havaita huippuarvo noin 1 min jaksonajan eli 1/60 Hz kohdalla vastaten puuskaisuuden vaikutusta. Dynaamisen analyysin kannalta merkittävä spektrin osa on rakenteen ensimmäisten ominaistajuuksien alue. Kuvasta 20 havaitaan että mitä alhaisempia rakenteen ominaistajuuksia ovat, sitä alttiimmaksi se tulee tuulikuorman dynaamisen osan vaikutukselle. Suurimpien vinoköysisiltojen ominaistajuuksia ovat alhaisia (suuruusluokaltaan 0,2 Hz), joten myös tämän ominaisuuden takia niiden mitoittamiseen tuulikuorman dynaamiselle osalle on kiinnitettävä erityistä huomiota.

4.1.3 Turbulenssin intensiteetti ja turbulenssiaste

Turbulenssin intensiteetti suuntaan u , v tai w määritellään heilahtelunopeuden ko. komponentin keskihajonnan ja keskinopeuden suhteen (dimensioton luku). Esimerkiksi tuulen keskinopeuden suuntainen intensiteetti I_u on

$$I_u = \frac{\sqrt{\langle u^2 \rangle}}{V_0} = \frac{\sigma_u}{V_0} \quad (71)$$

Intensiteetin arvo riippuu maaston tyypistä ja korkeussuhteista sekä keskinopeuden korkeusjakauman perusteella tarkastelupisteen korkeudesta. Intensiteetin arvo lähellä maanpintaa on 20% luokkaa arvojen pienentyessä korkeuden kasvaessa. Intensiteetin mittauksissa saatavat tulokset ovat riippuvaisia keskinopeuden ja ääriarvojen määrittämisajasta: mitä pidempi on keskinopeuden ja mitä lyhyempi on ääriarvojen mittausaika, sitä suurempia arvoja saadaan turbulenssin intensiteetille.

Turbulenssiaste määritellään kaavalla [9]

$$I_{u,v,w} = \frac{1}{V_0} \sqrt{\frac{1}{3}(\langle u^2 \rangle + \langle v^2 \rangle + \langle w^2 \rangle)} \quad (72)$$

Turbulenssiaste kuvaa puuskaisuuden intensiteettiä. Turbulenssiasteen voidaan olettaa olevan suurempi maanpinnan läheisyydessä kuin korkeammalla maanpinnasta - maaston epätasaisuudet rikkovat tasaisen ilmapvirtauksen.

4.1.4 Suunnittelutuulennopeuden määrittäminen

Suunnittelutuulennopeuden määrittämisessä käytetään mitattuihin tilastoihin perustuvaa referenssituulennopeutta, esim. kerran 10 tai 50 vuodessa esiintyvää V_{10} :n arvoa. Riittävän varmuustason saavuttamiseksi referenssituulennopeus kerrotaan erilaisilla kertoimilla, joita ovat esim. osavarmuus- ja tilastokertoimet sekä ympäröivän maaston korkeussuhteet huomioon ottaen kerroin.

Jos rakenteen mitoitus tehdään staattisen analyysin perusteella, on suunnittelutuulennopeudessa otettava huomioon tuulen puuskaisuuden vaikutus. Dynaamisessa analyysissä puuskien vaikutus sisältyy heilahtelunopeuteen ja sen aiheuttamaan tuulikuorman dynaamiseen osaan. Täten dynaamisen analyysin tuulen keskinopeuden suunnitteluarvo on tyypillisesti alhaisempi kuin staattisen analyysin suunnittelutuulennopeus. Suunnittelutuulennopeuden määrittämisestä on esimerkki luvun 6 mallilaskennassa.

4.2 Heilahtelunopeuden tehospektrin tiheysfunktiot

Tuulen energiaspektrissä (kuva 20) havaittu riippuvuus taajuudesta on perusta tuulikuorman dynaamisen osan vaikutuksen todennäköisyysmatemaattiselle mallintamiselle. Mallintamiseen soveltuu kohdan 3.3.2 spektrianalyysi, jossa tehospektrin tiheysfunktio kuvaa suoraan energiaspektriä.

Tehospektrin tiheysfunktiot voidaan antaa joko kulmataajuuden (ω) tai taajuuden (f) funktiona. Heilahtelunopeuden spektrit on tapana antaa taajuuden f funktiona, jolloin ne on määritetty positiivisella taajuusalueella. Vastaavat spektrit ω :n funktioina saadaan lausumalla f kulmataajuuden avulla ja tarkastelemalla positiivista taajuusalueita.

Tuulen pituus- (eli keskinopeuden) suuntaisen heilahtelunopeuden komponentin tehospektrin tiheysfunktioille ovat esittäneet empiirisiä yhteyksiä [2] esim. *Davenport, Harris ja von Kármán*.

Davenportin mukaan [19]

$$\frac{\omega S_u(\omega)}{\sigma_u^2} = \frac{2}{3} \frac{x_1^2}{(1+x_1^2)^{4/3}}.$$

Vastaavasti Harrisin mukaan [2]

(73)

$$\frac{\omega S_u(\omega)}{u_*^2} = \frac{4x_1^2}{(1+x_1^2)^{5/6}},$$

missä $x_1 = \frac{\omega L_1}{2\pi V_{10}}$ ja $L_1 = 1200 \dots 1800$ metriä.

Tämänhetkisen käsityksen mukaan [24] parhaiten koko taajuusaluetta kuvaa von Kármánin lauseke

$$\frac{f S_u(f)}{\sigma_u^2} = A \left(\frac{L_x f}{V_z} \right)^{-\frac{2}{3}}, \quad (74)$$

jossa V_z on tuulen keskinopeus mitattuna tunnin aikakeskiarvona korkeudella z ja L_x (*integral length scale*) määritellään autokorrelaatiofunktion skaalan perusteella ja saadaan lausekkeesta (vrt. kaava 50)

$$L_x = V_z \int_0^\infty R_u(\tau) d\tau. \quad (75)$$

Kerrointekijä A (von Kármánin esittämänä $A = 0,115$) saadaan tarkennetusta yhteydestä [24]

$$A = 0,115 \left[1 + 0,3151 \left(1 - \frac{z}{h_o} \right)^6 \right]^{\frac{2}{3}}, \quad (76)$$

jossa

$$h_o = \frac{u_*}{6f_c} \quad \text{ja} \quad f_c \text{ on coriolis-parametri.}$$

Coriolis-parametri ottaa huomioon *coriolis*-voiman vaikutuksen ja saadaan kaavasta

$$f_c = 2\Omega \sin\theta,$$

jossa

(77)

$$\Omega = 72,9 \cdot 10^{-6} \text{ rad/s (maapallon kulmanopeus) ja}$$

θ on kohteen sijaintia vastaava leveyspiiri.

Korkealla taajuusalueella ($f z / V > 0,1$) on poikkittaissuuntaisilla heilahtelunopeuden tehospektrin tiheysfunktiolla (S_v ja S_w) von Kármánin mallissa yhteydet [24]

$$\frac{S_v(f)}{S_u(f)} = \frac{S_w(f)}{S_u(f)} = \frac{4}{3},$$

$$L_y = L_z = \frac{1}{2} L_x.$$

(78)

Liitteessä A on esitetty von Kármánin spektrin kuvaajat ja taulukot, joilla parametri L_x (kaava 75) voidaan määrittää.

Ristikorrelaatiota vastaavan tehospektrin tiheysfunktio (kohta 3.3.1) määrittään ns. *koherenssifunktion* perusteella. Koherenssi on ristikorrelaatio kahden eri pisteessä vaikuttavan heilahtelunopeuden välillä kuvaten heilahtelunopeuksien riippuvuutta toisistaan eli tuulennopeuden avaruusjakaumaa. Rakenteen dynaamisen toiminnan kannalta on edullista, jos heilahtelunopeuksien koherenssi on pieni: tällöin eri pisteissä vaikuttavat heilahtelunopeuksien aiheuttamat herätekomponentit ovat lähes riippumattomia toisistaan ja todennäköisyys sille, että herätekomponentit vaikuttaisivat yhtä aikaa epäedullisesti, on pieni.

Pystysuoralle koherenssille on Davenport esittänyt eksponenttimuotoisen, pisteiden väliseen korkeuseroon Δz perustuvan yhteyden [19]

$$\sqrt{\text{koherenssi}} = \exp(-C_z f \frac{\Delta z}{V_{10}}),$$

(79)

jossa koherenssivakio C_z on suuruusluokaltaan 6...8. Vastaava yhteys tehospektrin tiheysfunktiolla lausuttuna on [19]

$$S_{ij}(\omega) = \sqrt{S_{ii}(\omega) S_{jj}(\omega)} \exp(-C_z \frac{\omega \Delta z}{2\pi V_{10}}).$$

(80)

Ottamalla huomioon myös vaakasuora koherenssi yhteys voidaan esittää muodossa [2]

$$S_{ij}(\omega) = \sqrt{S_i(\omega)S_j(\omega)} \exp\left[-\frac{\omega}{2\pi V_{10}} \sqrt{(C_x^2 \Delta x^2 + C_y^2 \Delta y^2 + C_z^2 \Delta z^2)}\right],$$

missä

(81)

Δx on vaikutuspisteiden x koordinaattien erotus,

Δy vaikutuspisteiden y koordinaattien erotus,

C_x pituussuuntaisen koherenssin määräävä vakio ja

C_y poikkisuuntaisen koherenssin määräävä vakio ($C_x \approx C_y$).

Koherenssivakiot C_x ja C_y ovat suuruusluokaltaan 3...10 [11].

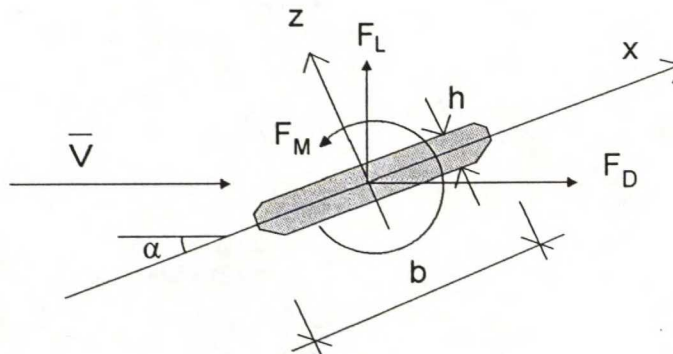
4.3 Tuulikuorman voimakomponentit

Rakenteeseen kohdistuva tuulikuorma oletetaan laskentamalleissa aiheutuvaksi ilmavirtauksen kineettisestä paineesta. Ilmavirtauksen kineettinen paine määritellään kaavalla

$$q = \frac{1}{2} \rho V^2, \quad (82)$$

jossa ρ = ilman tiheys ja V = ilmavirtauksen nopeus.

Kineettisen paineen kappaleeseen aiheuttamat voimakomponentit jaetaan vastukseen F_D , nostovoimaan F_L ja poikittaisvoimaan F_O . Vastuskomponentin suunta yhtyy ilmavirtauksen suuntaan (kuva 21). Poikittaisvoiman F_O suunta yhtyy y akselin suuntaa. Voimakomponentit lasketaan voimakertoimien (C_D , C_L ja C_O), kineettisen paineen ja tarkasteltavan pinta-alan tulona. Kineettisen paineen aiheuttama momentti esitetään verrannollisena momenttikertoimeen C_M . Voimakertoimet jaetaan kappaleen liiketilasta riippumattomiin eli *stationaarisiiin* (*steady aerodynamic coefficients*) kertoimiin ja kappaleen liiketilasta riippuviin eli *epästationaarisiiin* (*unsteady aerodynamic coefficients*) kertoimiin. Esimerkkinä epästationaaristen voimakertoimien perusteella laskettavista voimakomponenteista ovat pyörteiden irtautumisesta aiheutuvat poikittaisvoimat (kohta 5.9.3).



Kuva 21. Tuulikuorman voimakomponentit.

Vastukseksi (*drag*) nimitetään virtauksen suuntaista voimakomponenttia. Vastus muodostuu painevastuksesta ja pinnan kitkavastuksesta. Kitkavastus on hallitseva virtaviivaisilla poikkileikkauksilla. Vastus pituusyksikköä kohden on voimakertoimen C_D avulla lausuttuna

$$F_D = C_D q h. \quad (83)$$

Kun kitkavoima on hallitseva, käytetään kaavassa (83) h :n sijasta poikkileikkauksen leveyttä b (jolloin myös C_D :n arvo muuttuu).

Nostovoimaksi (*lift*) nimitetään virtauksen suuntaa vastaan kohtisuoraa voimakomponenttia. Nostovoima pituusyksikköä kohden on voimakertoimen C_L avulla lausuttuna

$$F_L = C_L q b. \quad (84)$$

Momentti pituusyksikköä kohden on momenttikertoimen C_M avulla lausuttuna

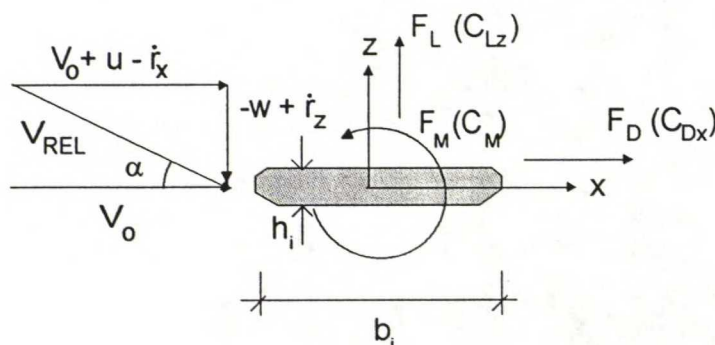
$$F_M = C_M q b^2. \quad (85)$$

Tuulikuorman dynaamisen vaikutuksen huomioimiseksi on kineettisen paineen kaavassa (82) esiintyvän ilmavirtauksen nopeuden V arvona käytettävä suhteellista nopeutta V_{REL} joka ottaa huomioon tarkasteltavan kappaleen nopeuden.

Merkitään kappaleen kiertymää y -akselin ympäri r_θ :lla, paikkavektoria r :llä ja r :n komponentteja r_x :llä, r_y :llä ja r_z :lla. Voimakertoimia voidaan pienillä α :n arvoilla approksimoida differentiaalina

$$C_F(\alpha) = C_F(\alpha_0) + \alpha \frac{\partial C_F(\alpha_0)}{\partial \alpha}, \quad (86)$$

missä α_0 on kohtauskulma perustilassa. Aproksimaation (86) johdosta jäävät itsekiihdyttävät voimat pois tarkastelusta [2]. Kuvassa 22 on havainnollistettu tuulikuorman voimakomponentteja, kun poikkileikkauksen x -akseli yhtyy V_0 :n suuntaan ($\alpha_0 = 0$).



Kuva 22. Voimakomponentit pienillä kohtauskulman arvoilla.

Kuvan 22 merkinnöillä saadaan (solmupisteen i) tuulikuorman voimakomponenteiksi ja momentiksi pituusyksikköä kohden

$$\begin{aligned} F_D &= \frac{1}{2} \rho h_i (C_{Dx} + \alpha \frac{\partial C_{Dx}}{\partial \alpha}) (V_0 + u - \dot{r}_x)^2, \\ F_L &= \frac{1}{2} \rho b_i (C_{Lz} + \alpha \frac{\partial C_{Lz}}{\partial \alpha}) (V_0 + u - \dot{r}_x)^2, \\ F_M &= \frac{1}{2} \rho b_i^2 (C_M + \alpha \frac{\partial C_M}{\partial \alpha}) (V_0 + u - \dot{r}_x)^2, \end{aligned} \quad (87)$$

missä

$$\alpha = \frac{-w + \dot{r}_z}{V_0} + r_\theta. \quad (88)$$

Yhtälöistä (87) voidaan erottaa kuormitus, vaimennus- ja jäykkyysosa. Jättämällä heilahtelunopuksien ja kappaleen nopeuden neliölliset termit pieninä tarkastelun ulkopuolelle [2] saadaan **kuormituksen staattiseksi osaksi**

$$\begin{aligned} F_D &= \frac{1}{2} \rho h_i C_{Dx} V_0^2, \\ F_L &= \frac{1}{2} \rho b_i C_{Lz} V_0^2, \\ F_M &= \frac{1}{2} \rho b_i^2 C_M V_0^2. \end{aligned} \quad (89)$$

Kuormituksen dynaaminen osa on

$$\begin{aligned} F_D &= \rho h_i C_{Dx} V_0 u - \frac{1}{2} \rho h_i \frac{\partial C_{Dx}}{\partial \alpha} V_0 w, \\ F_L &= \rho b_i C_{Lz} V_0 u - \frac{1}{2} \rho b_i \frac{\partial C_{Lz}}{\partial \alpha} V_0 w, \\ F_M &= \rho b_i^2 C_M V_0 u - \frac{1}{2} \rho b_i^2 \frac{\partial C_M}{\partial \alpha} V_0 w. \end{aligned} \quad (90)$$

Aerodynaamisesta vaimennuksesta johtuva osa on (eli nopeuteen verrannolliset termit)

$$\begin{aligned} F_D &= -\rho h_i C_{Dx} V_0 \dot{r}_x + \frac{1}{2} \rho h_i \frac{\partial C_{Dx}}{\partial \alpha} V_0 \dot{r}_z, \\ F_L &= -\rho b_i C_{Lz} V_0 \dot{r}_x + \frac{1}{2} \rho b_i \frac{\partial C_{Lz}}{\partial \alpha} V_0 \dot{r}_z, \\ F_M &= -\rho b_i^2 C_M V_0 \dot{r}_x + \frac{1}{2} \rho b_i^2 \frac{\partial C_M}{\partial \alpha} V_0 \dot{r}_z. \end{aligned} \quad (91)$$

Aeroelastisesta jäykkyydestä johtuva osa on (eli siirtymään verrannolliset termit)

$$\begin{aligned} F_D &= \frac{1}{2} \rho h_i \frac{\partial C_{Dx}}{\partial \alpha} V_0^2 r_\theta, \\ F_L &= \frac{1}{2} \rho b_i \frac{\partial C_{Lz}}{\partial \alpha} V_0^2 r_\theta, \\ F_M &= \frac{1}{2} \rho b_i^2 \frac{\partial C_M}{\partial \alpha} V_0^2 r_\theta. \end{aligned} \quad (92)$$

Yleisemmässä tapauksessa, kun tuulen keskinopeudella on komponentti myös z-akselin suuntaan, saadaan elementin voimakomponentit summamalla kaavoihin (89)-(92) z-akselin suuntaan lasketut voimakomponentit.

Edellisen tarkastelun perusteella saadaan liikeyhtälön (25) aerodynaamista vaimennusta vastaava, solmupisteen i vaimennusmatriisi, esittämällä kaavat (91) matriisimuodossa

$$[c_a]^i = \rho L_i V_0 \begin{bmatrix} h_i C_{Dx} & 0 & -\frac{1}{2} h_i \frac{\partial C_{Dx}}{\partial \alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_i C_{Lz} & 0 & -\frac{1}{2} b_i \frac{\partial C_{Lz}}{\partial \alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_i^2 C_M & 0 & -\frac{1}{2} b_i^2 \frac{\partial C_M}{\partial \alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (93)$$

ja aeroelastista jäykkyyttä vastaava jäykkyyismatriisi, esittämällä kaavat (92) matriisimuodossa

$$[k_a]^i = -\frac{1}{2} \rho L_i V_0^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & h_i \frac{\partial C_{Dx}}{\partial \alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_i \frac{\partial C_{Lz}}{\partial \alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_i^2 \frac{\partial C_M}{\partial \alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (94)$$

missä L_i on pituus, jolta voimat lasketaan kohdistuviksi solmupisteeseen i . Voimavektorin alkiot on esitetty järjestyksessä $\{F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z\}$.

Liikkeyhtälö (25) voidaan edellisten avulla kirjoittaa muotoon

$$[m]\{\ddot{x}\} + ([c] + [c_a])\{\dot{x}\} + ([k] + [k_a])\{x\} = \{p(t)\}. \quad (95)$$

Jäykkien rakenteiden kohdalla aeroelastisen jäykkyyden voidaan olettaa olevan pieni verrattuna rakenteelliseen jäykkyyteen. Kuorman dynaamisen osan heilahtelunopeuden komponenttien arvoja u , v ja w ei stokastisen tuulikuorman tapauksessa tunneta, sen sijaan niiden tehospektrin tiheysfunktioita voidaan muodostaa kohdan 4.2 mukaisesti. Näistä voidaan edelleen muodostaa herätteen tehospektrin tiheysmatriisi.

4.4 Herätteen tehospektrin tiheysmatriisin muodostaminen

Tuulikuormituksen aiheuttaman herätteen tehospektrin tiheysmatriisi muodostetaan kuormituksen dynaamisen osan voimakomponenteista (90), heilahtelunopeuksien tehospektrin tiheysfunktioista (kohta 4.2) sekä koherenssitermeistä (81). Lausekkeiden (90) neliöt ovat

$$\begin{aligned} F_D F_D &= (\rho h_i V_0)^2 [C_{Dx}^2 u^2 - C_{Dx} \frac{\partial C_{Dx}}{\partial \alpha} u w + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial C_{Dx}}{\partial \alpha} \right)^2 w^2], \\ F_L F_L &= (\rho b_i V_0)^2 [C_{Lz}^2 u^2 - C_{Lz} \frac{\partial C_{Lz}}{\partial \alpha} u w + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial C_{Lz}}{\partial \alpha} \right)^2 w^2], \\ F_M F_M &= (\rho b_i^2 V_0)^2 [C_M^2 u^2 - C_M \frac{\partial C_M}{\partial \alpha} u w + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial C_M}{\partial \alpha} \right)^2 w^2]. \end{aligned} \quad (96)$$

Korvaamalla heilahtelunopeuden neliöt u^2 ja w^2 vastaavilla tehospektrin tiheysfunktioilla S_u ja S_w sekä olettamalla ristikorrelaatiota vastaava termi S_{uw} nolaksi saadaan herätteen tehospektrin tiheysmatriisin diagonaalitermeiksi

$$\begin{aligned} S_{Dii}(\bar{\omega}) &= (\rho h_i V_0)^2 [C_{Dxi}^2 S_{ui}(\bar{\omega}) + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial C_{Dxi}}{\partial \alpha} \right)^2 S_{wi}(\bar{\omega})], \\ S_{Lii}(\bar{\omega}) &= (\rho b_i V_0)^2 [C_{Lzi}^2 S_{ui}(\bar{\omega}) + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial C_{Lzi}}{\partial \alpha} \right)^2 S_{wi}(\bar{\omega})], \\ S_{Mii}(\bar{\omega}) &= (\rho b_i^2 V_0)^2 [C_{Mi}^2 S_{ui}(\bar{\omega}) + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial C_{Mi}}{\partial \alpha} \right)^2 S_{wi}(\bar{\omega})]. \end{aligned} \quad (97)$$

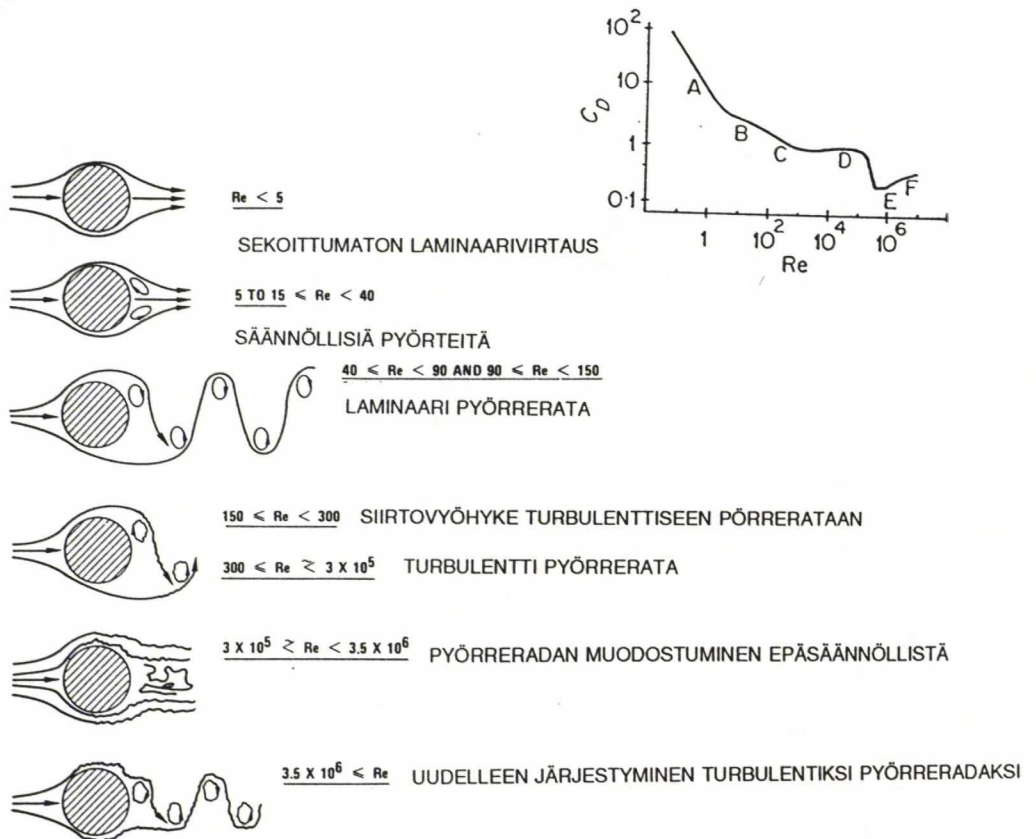
Koska solmupisteen i heilahtelunopeudet ovat koherenssilausekkeen (81) mukaisesti vuorovaikutuksessa pisteen j heilahtelunopeuksien kanssa, on herätteen tehospektrin tiheysmatriisi täysi ja ei diagonaaliset termit ovat

$$\begin{aligned}
S_{Dij}(\bar{\omega}) &= \rho^2 h_i h_j V_0^2 [C_{Dxi} C_{Dxj} S_{uij}(\bar{\omega}) + \frac{1}{4} \frac{\partial C_{Dxi}}{\partial \alpha} \frac{\partial C_{Dxj}}{\partial \alpha} S_{wij}(\bar{\omega})], \\
S_{Lij}(\bar{\omega}) &= \rho^2 b_i b_j V_0^2 [C_{Lzi} C_{Lzj} S_{uij}(\bar{\omega}) + \frac{1}{4} \frac{\partial C_{Lzi}}{\partial \alpha} \frac{\partial C_{Lzj}}{\partial \alpha} S_{wij}(\bar{\omega})], \\
S_{Mij}(\bar{\omega}) &= \rho^2 b_i^2 b_j^2 V_0^2 [C_{Mi} C_{Mj} S_{uij}(\bar{\omega}) + \frac{1}{4} \frac{\partial C_{Mi}}{\partial \alpha} \frac{\partial C_{Mj}}{\partial \alpha} S_{wij}(\bar{\omega})].
\end{aligned} \tag{98}$$

Lausekkeiden (97) ja (98) voimakomponenteissa on oletettu yhteyksien (90) mukaisesti, että tuulen keskinopeudella V_0 :lla ei ole komponenttia z-akselin suuntaan. Jos V_0 :lla on komponentti z-akselin suuntaan, muodostetaan herätteen tehospektrin tiheysmatriisi korvaamalla voimakomponenttien lausekkeet yleisemmillä lausekkeilla ja olettamalla heilahtelunopeuksien ristikorrelaatiota vastaava tehospektrin tiheysfunktio nollassi.

4.5 Voima- ja momenttikertoimet

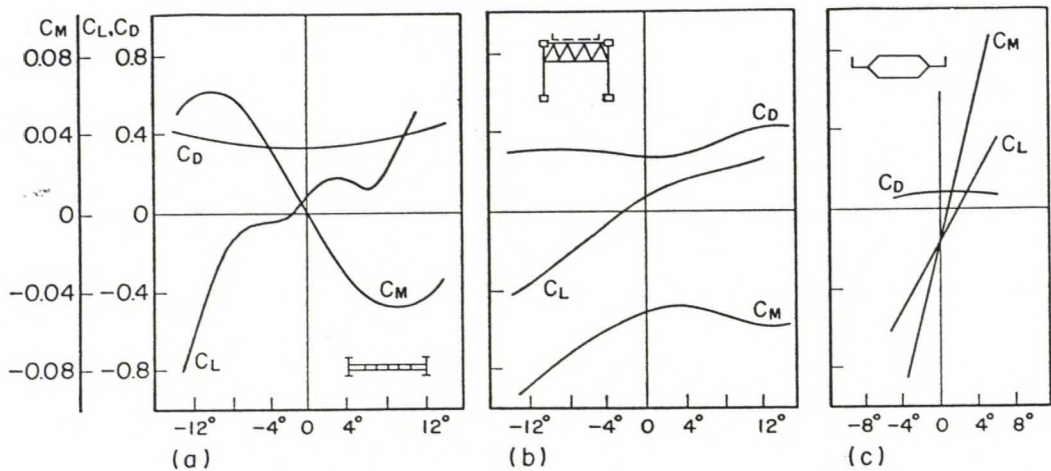
Rakenneosan liiketilasta riippumattomat (eli stationaariset) voima- ja momenttikertoimet voidaan ilmaista kohtauskulman α funktiona (kuva 24) eri Reynoldsin luvun alueilla. Kuvassa 23 on esitetty ympyräpoikkileikkauksen vastuskertoimen arvon riippuvuus Re :n alueista ja vastaavat pyörteytypit.



Kuva 23. Vastuskertoimen arvot ympyräpoikkileikkaukselle [16] eri Reynoldsin luvun alueilla [27]. Vastuskertoimen arvot on ilmoitettu suhteena Reynoldsin lukuun.

Voimakertoimet voidaan määrittää tuulitunnelikokeiden perusteella. Koska tuulitunnelikokeissa voimakertoimet mitataan tyypillisesti pienoismallista, mittakaavaero vaikuttaa määritettyjen kertoimien tarkkuuteen Reynoldsin luvun muutoksen perusteella.

Tarkemmassa analyysissä voidaan ottaa huomioon rakenneosan kohtaan ilmavirtauksen turbulenssin ja kannella olevan liikenteen vaikutus voimakertoimien arvoihin. Käytännössä vastuskertoimet voidaan arvioida taulukoista (esim [18]). Momenttikertoimen arvo määräytyy vastus- ja nostovoimakomponentin vaikutuspisteen perusteella. Voimakertoimien kuvaajista voidaan arvioida sillan herkkyyttä aerodynaamisille epästabiiliusilmiöille. Negatiivinen derivaatta C_L :n kuvaajassa ennustaa laukkaamisilmiön mahdollisuutta (kohta 5.9.2) ja vastaavasti C_M :n kuvaajassa vääntöflutterin mahdollisuutta.



Stationaariset aerodynaamiset kertoimet.

- (a) vanha Tacoma Narrows -silta (Farquharson)
- (b) uusi Tacoma Narrows -silta (Farquharson)
- (c) Severn -silta (Walshe)

Kuva 24. Kokeellisia voimakertoimen arvoja [20].

5. Laskentamalli vinoköysoisillan tuulikuorman analysointia varten

Esitettävä laskentamalli on satunnaisvärähtelyjen teoriaan (kohta 3.3) perustuva spektrianalyysi. Laskentamallin käyttö on perusteltua, jos on oletettavissa (tai havaittu), että tuulikuorma aiheuttaa siltaan haitallisia värähtelyjä ja värähtelyt halutaan laskennallisesti mallintaa. Laskentamallin valintaan vaikuttaneita huomioita ovat:

1. Tuulen heilahtelunopeus vaihtelee lyhyellä aikavälillä satunnaisesti ja aiheuttaa jaksollisia herähteitä. Näitä herähteitä ei tarkemmassa analyysissä ole mielekäästä käsitellä deterministisenä kuormana.

2. Tilastoitaessa tuulen heilahtelunopeuden komponenttien neliöiden aikakeskiarvoa havaitaan tilastollista riippuvuutta [9,11,19] taajuuden- ja tarkastelupisteiden välisen etäisyyden funktiona. Heilahtelunopeuden empiiriset tehospektrin tiheysfunktiot $S(\omega)$ kuvaavat näitä riippuvuuksia; $S(\omega_i)$ on suoraan verrannollinen heilahtelunopeuden neliön aikakeskiarvoon taajuudella ω_i .

3. Spektrianalyysillä määritetystä taajuusvasteesta voidaan määrittää vasteen keskihajonta (*root mean square response*) ja vasteen ääriarvojen määrittämiseen tarvittavat parametrit. Vasteen tunnusluvuista voidaan edelleen määrittää varmuuskertoimia ja korvauskuormien arvoja sallitun vaurioitumistodennäköisyyden funktiona.

4. Vaihtoehto spektrianalyysille on aikatasossa suoritettava analyysi, jossa tuulikuormaa simuloidaan siten, että simuloidusta tuulikuormasta määritetyt tunnusluvut vastaavat luonnonkuormasta mitattuja arvoja. Tällöin kuormituksen simulointia on jatkettava niin kauan, että vasteesta voidaan määrittää halutut tunnusluvut. Menetelmä on käyttökelpoinen silloin, kun vaimennus on suhteellista ja liikeyhtälöt voidaan erottaa. Menetelmää ei ole valittu tuulikuorman simulointiin liittyvien epätarkkuuksien johdosta ja koska aerodynaamista vaimennusta ei tarkemmassa analyysissä voida mallintaa suhteellisenä.

5. Pyörteiden irtaantumisesta aiheutuvan köyden värähtelyn amplitudin ääriarvon laskemiseksi esitetään yksinkertaistettu laskentamalli kohdassa 5.9.3. Muiden aerodynaamisten epästabiiliusilmiöiden suhteen esityksessä tyydytään likikaavojen antoon kriittisille tuulennopeuksille johtuen näiden ilmiöiden hankalasta mallintamisesta.

Laskentamalli perustuu lähteiden [2] (s. 241) ja [7] (appendix 5/1) pohjalta muotoiltuun algoritmiin sekä luvuissa 3 ja 4 esitettyyn teoriaan. Laskentamalli on suunniteltu tietokoneavusteiseen laskentaan ja mallin edellyttämät tietokoneohjelmat (FEM-ohjelmaa lukuun ottamatta) on tämän työn puitteissa laadittu. Tehty TV-ohjelmisto esitellään liitteessä B ja sovellusesimerkki luvussa 6.

Laskentamallin kaaviollinen kulku on seuraava (lohkojen ylätunnisteet viittaavat kappalenumerointiin):

(5.1)

Ratkaistaan staattinen tehtävä, kuormana tuulikuorman staattinen osa.

$$[k]\{x\}_{st} = \{p\}_{st} \Rightarrow \{x\}_{st} = [k]^{-1}\{p\}_{st}$$

⇓

(5.2)

Ratkaistaan FEM-ohjelmalla n ensimmäistä ominaismuotoa ja ω -arvoa dynaamisen analyysin rakennemallista.

$$\Rightarrow [\bar{\Phi}] = [\phi_1 \phi_2 \dots \phi_n],$$

$$[\bar{\Omega}^2] = [\omega_1^2 \omega_2^2 \dots \omega_n^2].$$

Diagonalisoidaan massa- ja jäykkyyssmatriisi:

$$diag[\bar{M}] = [\bar{\Phi}]^T [m] [\bar{\Phi}],$$

$$diag[\bar{K}] = [\bar{\Phi}]^T [k] [\bar{\Phi}].$$

⇓

(5.3)

Kootaan vaimennusmatriisi.

Aerodynaaminen vaimennus: $[\bar{C}]_a = [\bar{\Phi}]^T [c]_a [\bar{\Phi}].$

Mekaaninen vaimennus määritetään moodikohtaisen vaimennussuhteen perusteella: $[\bar{C}]_s = diag[2\xi_i \omega_i \bar{M}_i].$

$$\Leftrightarrow [\bar{C}] = [\bar{C}]_a + [\bar{C}]_s.$$

⇓

(5.4)

Määritetään kuormituksen tehospektrin tiheysmatriisi $[\bar{S}_p(\bar{\omega})]$ tarkasteltavalla taajuudella $\bar{\omega}$:

$$[\bar{S}_p(\bar{\omega})] = [\bar{\Phi}]^T [S_p(\bar{\omega})] [\bar{\Phi}].$$

⇓

⇓

(5.5)

Määritetään kompleksinen dynaaminen jäykkyysmatriisi tarkasteltavalla taajuudella $\bar{\omega}$:

$$[\bar{B}(\bar{\omega})] = -\bar{\omega}^2[\bar{M}] + i\bar{\omega}[\bar{C}] + [\bar{K}],$$

sekä lasketaan kompleksinen taajuusvastefunktio

$$[\bar{H}(\bar{\omega})] = [\bar{B}(\bar{\omega})]^{-1}.$$

⇓

(5.6)

Määritetään (ja talletetaan) vasteen tehospektrin tiheysmatriisi taajuudella $\bar{\omega}$:

$$[\bar{S}_x(\bar{\omega})] = [\bar{H}(\bar{\omega})][\bar{S}_p(\bar{\omega})][\bar{H}(\bar{\omega})]^T.$$

Kasvatetaan taajuutta: $\bar{\omega} = \bar{\omega} + \Delta\bar{\omega}$,

ja palataan vaiheeseen (5.4), kunnes taajuusalue on käyty lävitse.

⇓

(5.7)

Lasketaan vasteen varianssit niille vapausasteille, joista ollaan kiinnostuneita:

$$\sigma_x^2 = \sum [\bar{\Phi}[\bar{S}_x(\bar{\omega})][\bar{\Phi}]^T \Delta\bar{\omega},$$

$$\sigma_{x^{(1)}}^2 = \sum \bar{\omega}^2 [\bar{\Phi}[\bar{S}_x(\bar{\omega})][\bar{\Phi}]^T \Delta\bar{\omega}.$$

⇓

(5.8)

Jälkikäsitellään tulokset:

- piirretään ominaismuodot
- piirretään tehospektrin tiheysfunktio
- määritetään vasteen ääriarvojen keskiarvo $\langle x_e \rangle$
- vasteen maksimiarvo on

$$X_{\max} = X_{st} + \langle x_e \rangle.$$

Laskentamallin keskeisimmät oletukset ovat:

- tuulen heilahtelunopeuksien komponenttien tehospektrin tiheysfunktio S_u ja S_w esitetään yhteyksien (74) ja (78) perusteella. Sillan jäykistyspalkin suuntainen turbulenssi (eli S_v) jätetään huomiotta
- koherenssitermit esitetään yhteydestä (81) vaikutuspisteiden etäisyyden funktiona
- vasteen dynaaminen osa oletetaan normaalijakautuneeksi; vasteen maksimiarvojen jakauman määräävät parametrit saadaan taajuusvasteesta
- tuulikuorman voimakomponenteista jätetään itsekiihdyttävät voimat ja neliölliset termit sekä aeroelastinen jäykkyys huomiotta (kohta 4.3)
- tuulen keskinopeus oletetaan vaakasuuntaiseksi; jos halutaan tarkastella rakennetta pienillä kohtauskulman arvoilla, voidaan kohtauskulman vaikutus ottaa huomioon voimakertoimien arvoissa.

Tuulikuorman mallintamisen parametrit ovat:

- tuulen keskinopeuden suunnitteluarvo ja korkeusjakauman määräävät parametrit
- heilahtelunopeuksien tehospektrin tiheysfunktio S_u ja S_w
- voimakertoimet ja voimakertoimien derivaattojen arvo nollakulmalla
- korkeus- ja vaakasuuntaisen koherenssin määräävät vakiot.

5.1 Staattinen ratkaisu

Tuulikuorman staattisen osan aiheuttamien siirtymien määrittämiseksi suoritetaan staattinen analyysi käyttäen keskinopeuden suunnitteluarvoa. Tuulennopeuden suunta valitaan määräävän vaikutuksen perusteella. Solmupisteiden kuormitustermit määräytyvät yhtälöistä (89) voimakertoimien perusteella. Dynaamista analyysiä varten talletetaan rakenteen siirtymät ja rakenneosien normaalivoimat.

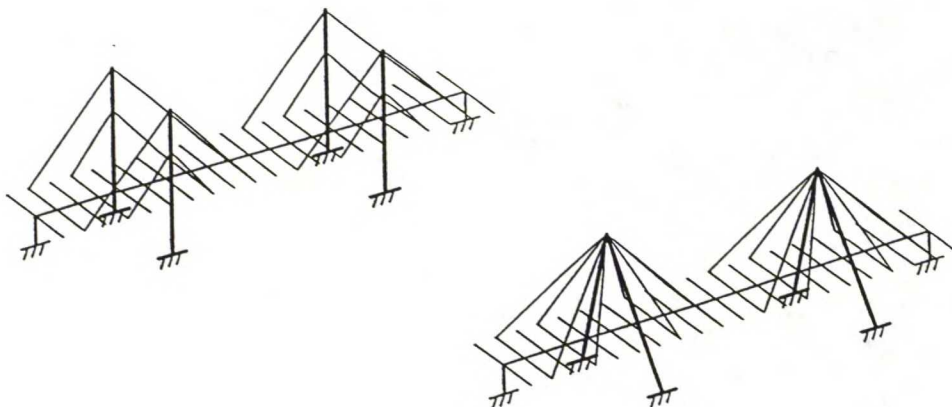
Käytettävä rakennemalli voi olla kohdan 5.2 mukainen dynaamisen analyysin 3-dimensioinen malli, tai jokin muu rakennemalli, joka ottaa huomioon rakenteeseen syntyvät vääntörasitukset. Vaikka staattinen ratkaisu voidaan suorittaa dynaamisen analyysiin soveltuvalla rakennemallilla, päästään staattisen analyysin malleilla useasti tarkempiin tuloksiin dynaamisen analyysin malleissa käytetyistä yksinkertaistuksista johtuen.

Rakenteen kriittinen tuulennopeus divergenssille (kohta 5.9.1) ja muille staattisille epästabiiliusilmiöille voidaan tarkastaa esim. lähteen [18] mukaan lasketun tuulennopeuden suunnitteluarvon perusteella.

5.2 Oinaismuotojen ja -taajuuksien määrittäminen

Tarvittava määrä ensimmäisiä ominaismuotoja -ja taajuuksia lasketaan esimerkiksi dynaamiseen analyysiin soveltuvalla FEM-ohjelmistolla. Laskentaa varten on muodostettava dynaamisen analyysin rakennemalli. Optimaalinen rakennemalli on riippuvainen tarkasteltavasta rakenneosasta ja numeerisesta laskentakapasiteetista.

Jos analyysi tehdään koko sillalle, ovat kuvan 25 mukaiset mallit käyttökelpoisia. Sillan pituussuuntainen palkkielementti sisältää jäykistyspalkin vääntö- ja taivutusjäykkyyden. Poikittaissuuntaisten sauvojen massojen avulla otetaan huomioon jäykistyspalkin vääntöliikkeen hitausmomentti. Pyloni muodostetaan palkkielementeistä. Köydet kuvataan jousi- tai sauvaelementeillä. Jos analyysissä ei olla kiinnostuneita köysien ominaisuuksista ja -muodoista (jotka voidaan määrittää tarkemmin muilla malleilla), riittää köyden kuvaamiseen yksi palkkielementti. Liittorakenteisen sillan rakenne-mallista on esimerkki luvun 6 mallilaskennassa.



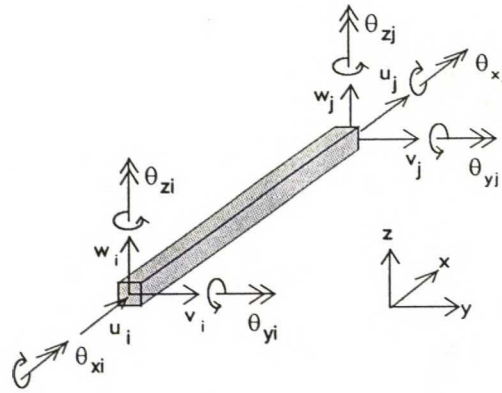
Kuva 25. Valmiin vinoköysisillan rakennemalleja [26].

Esimerkiksi luvun 6 mukaisen 3-dimensioisen mallin tapauksessa vapausasteiden määrä kasvaa varsin suureksi. Laskentakapasiteetin varmistamiseksi on tyydyttävä käyttämään jousi- ja palkkielementtejä (kuva 26). Luonnollisen jaon elementeille muodostavat rakenneosien liitoskohdat.

Laskentakapasiteetin ylittyessä on tarpeen yksinkertaistaa mallia. Jos keskitytään tarkastelemaan tiettyä rakenneosaa, voidaan analyysi suorittaa yksinkertaisemmilla rakennemalleilla, vaikka samalla menetetäänkin tietoa rakenteen toiminnasta kokonaisuutena.

Rakenneosissa esiintyy normaalivoimia (vinoköysien vetovoimat sekä pylonin- ja kansirakenteen puristusvoimat), joilla on vaikutusta rakenneosien ominaisuuksiin. Vaikutus voidaan ottaa huomioon geometrisen jäykkyydsmatriisin avulla - normaalivoimina käytetään staattisen analyysin arvoja.

Jotkut kaupallisista FEM-ohjelmistoista tarjoavat mahdollisuuden ominaismuotojen ja -taajuuksien määrittämiseen vaihtoehtoisilla menetelmillä (esim. *Ritzin* menetelmä [6]), joilla voidaan päästä tarkempiin tuloksiin. Esitettävän laskentamallin kannalta on samantekevää millä menetelmällä ominaismuodot ja vektorit on määritetty.



Kuva 26. Yleinen 3-dimensioinen palkkielementti (12 vapausastetta).

FEM-ohjelman muodostama massamatriisi voi olla tyypiltään jatkuva- (*consistent*) tai keskitetty (*lumped*) massamatriisi. Keskitetyn massamatriisin tapauksessa oletetaan elementin massa keskittyneeksi elementin päihin eli rakennemallin solmupisteisiin, jolloin matriisi on diagonaalinen. Jatkuva massamatriisi on elementtimenetelmän muotofunktioilla muodostettu täysi massamatriisi. Se kuvaa keskitettyä massamatriisia paremmin hitausvoimien jakautumista. Rakennemallissa, jossa solmupisteiden määrä on suuri, saadaan massat keskitettyä riittävän tarkasti solmupisteisiin. Tällöin laskentakapasiteetin kannalta on edullisempaa käyttää keskitettyä massamatriisia.

Moodisummausmenettelyn mukaisesti massa- ja jäykkyysmatriisi diagonalisoidaan ominaismuotomatriisilla kaavan (31) mukaisesti. Jos käytettävä FEM-ohjelma muodostaa ns. *normeeratun**) ominaismuotomatriisin, on massamatriisin diagonalisoinnin tuloksena yksikkömatriisi ja jäykkyysmatriisin diagonalisoinnin tuloksena ominaisarvomatriisi $[\Omega^2]$. Tällöin ei ole tarpeen suorittaa matriisikertolaskuja, vaan yleistetty massamatriisi on identtisesti yksikkömatriisi ja yleistetty jäykkyysmatriisi voidaan muodostaa suoraan FEM-ohjelman laskemista ominaistaajuuksista.

5.3 Vaimennusmatriisin muodostaminen

Systeemin vaimennusmatriisi muodostetaan aerodynaamista ja mekaanista vaimennusta kuvaavien vaimennusmatriisien summana. Aerodynaaminen vaimennus määritetään yhteydestä (93) samoille solmupisteille, joille tuulikuorma lasketaan kohdistuvaksi. Jos rakenteeseen on asennettu ulkoisia vaimentimia, voidaan vastaavista vaimennuskertoimista muodostettu matriisi $[c]_z$ summata aerodynaamista vaimennusta kuvaavaan vaimennusmatriisiin

$$[c]_{a'} = [c]_a + [c]_{z'} \quad (99)$$

tai niiden vaikutus voidaan arvioida moodikohtaiseen mekaaniseen vaimennukseen.

*) Normeeratun ominaismuotomatriisin i :s ominaisvektori on jaettu i :nnen yleistetyn massan neliöjuurella.

Moodisummausmenettelyn mukaisesti on vaimennusmatriisi kerrottava samoilla ominaismuotomatriiseilla, joilla on diagonalisoitu massa- ja jäykkymatriisi

$$[\bar{C}]_a = [\bar{\Phi}]^T [c]_a [\bar{\Phi}]. \quad (100)$$

Mekaaninen vaimennus arvioidaan moodikohtaisen vaimennussuhteen perusteella. Vastaavat yleistetyt vaimennustermit määräytyvät yhtälöstä (37). Jos ominaismuodon logaritminen dekrementti tunnetaan, saadaan vaimennussuhde kaavasta (7). Logaritminen dekrementin arvot voidaan määrittää likimääräisesti esim. kuormitusohjeesta [14]. Vaimennusmatriisi ei ole diagonaalinen johtuen aerodynaamisista vaimennusta kuvaavan matriisin kytkentätermeistä (*aerodynamic coupling*) eli alkioista, jotka eivät ole matriisin lävistäjällä.

5.4 Kuormituksen tehospektrin tiheysmatriisi ja taajuusalue

Kuormituksen tehospektrin tiheysmatriisi tarkasteltavalla taajuudella muodostetaan yhtälöiden (97) ja (98) mukaisesti. Matriisi muunnetaan normaalkoordinaatteihin ominaismuotomatriiseilla kertomalla kaavan (57) mukaisesti.

Tarkasteltava taajuusalue määrätään kohdan 5.2 mukaisesti laskettujen ensimmäisten ominaistaajuuksien perusteella ja taajuuden inkrementti siten, että haluttu laskentatarkkuus saavutetaan. Resonanssitaajuuksia suuremmilla taajuuden arvoilla lähenevät vasteen tehospektrin tiheysmatriisin alkiot nopeasti nollaa, jolloin taajuusaluetta voidaan yläpäästä rajoittaa. Alin tarkasteltava taajuus on esim. 0,1 Hz eli likimain alin taajuus, jolla heilahtelunopeuden empiiristä tehospektriä on tarkoitettu sovellettavaksi.

Erityisesti ominaistaajuuksien kohdalla on taajuuden inkrementin oltava mahdollisimman pieni, koska näillä taajuuksilla olevat resonanssihiipit määräävät vasteen keskihajonnan.

5.5 Kompleksinen taajuusvastefunktio

Kompleksinen taajuusvastematriisi $[H]$ lasketaan tarkasteltavalla taajuudella kääntämällä kompleksinen dynaaminen jäykkymatriisi $[B]$. Käännettävän matriisin koko on $m \times m$, missä m on tarkasteluun otettujen ominaismuotojen määrä.

5.6 Vasteen tehospektrin tiheysmatriisi

Vasteen tehospektrin tiheysmatriisi normaalikoordinaateilla tarkastelevalla taajuudella lasketaan kaavasta (60).

5.7 Varianssien laskeminen

Siirtymän ja nopeuden varianssit määritellään niille vapausasteille, joista ollaan kiinnostuneita, esim. yhdelle solmupisteelle kerrallaan - jolloin vasteen tehospektrin tiheysmatriisia ei tarvitse eksplisiittisesti muodostaa. Integraalilausekkeet (62) ja (63) korvataan summalausekkeilla tai integroidaan numeerisesti.

5.8 Tulosten jälkikäsittely

Laskentamallilla määritetyt vasteen keskihajonnat ovat kohdassa 3.3 tehdyin oletuksin tarkkoja. Sen sijaan vasteen ääriarvojen todennäköisyysjakauman ja -keskiarvon määrittämiseen voidaan käyttää vaihtoehtoisia teorioita.

Tuloksista on hyödyllistä piirtää vasteen tehospektrin tiheysfunktiot rakenteen dynaamisen toiminnan analysoimiseksi. Esim. $\log(S) - f$ koordinaatissa (kuvat 32 ja 33) saadaan havainnollisia esityksiä. Kuvaajan piikit kuvaavat resonanssikohtia ja vastaavat taajuudet ovat rakenteen todennäköisimpiä värähtelytaajuuksia. Nämä taajuudet ovat riippuvaisia paitsi rakenteen ominaistaajuuksista myös vaimennuksesta ja herätteen jakautumisesta eri taajuuksille. Resonanssipeikkien suhteellisista S_x :n arvoista voidaan arvioida vaarallisimmat ominaistaajuudet käytettäväksi edelleen esim. vaimentimien ja rakenneratkaisujen mitoitukseen ja suunnitteluun.

5.9 Kriittisten tuulennopeuksien arvioiminen

Edellä esitetty laskentamalli ei ota huomioon ilmavirtauksen aiheuttamia epästabiiliusilmiöitä. Kriittiset tuulennopeudet (ja muut suunnitteluparametrit) voidaan arvioida suosituksesta [18]. Seuraavassa esitetään yksinkertaiset matemaattiset mallit kriittisten tuulennopeuksien arvioimiselle.

5.9.1 Divergenssi

Ilmavirtauksen aiheuttama momentti on kaavojen (85) ja (86) mukaisesti

$$F_M \approx (C_M + \alpha \frac{\partial C_M}{\partial \alpha}) \frac{1}{2} \rho V^2 b^2 L_i \quad (101)$$

missä L_i on pituus, jolta tuulikuorma redusoidaan solmupisteen kuormaksi. Jäykistyspalkin kimmoinen vääntöjäykkyys k_T aiheuttaa solmupisteeseen tukimomentin $k_T \alpha$, joka voimatasapainon perusteella on yhtä suuri kuin ulkoinen momentti, eli

$$(C_M + \alpha \frac{\partial C_M}{\partial \alpha}) \frac{1}{2} \rho V^2 b^2 L_i = k_T \alpha \quad (102)$$

josta ratkaistuna

$$\alpha = C_M \frac{\rho V^2 b^2 L_i}{2 k_T} / (1 - \frac{\partial C_M}{\partial \alpha} \frac{\rho V^2 b^2 L_i}{2 k_T}).$$

Vääntökulman arvo lähenee ääretöntä, kun nimittäjä lähenee nollaa. Tästä seuraa divergenssin kriittisen tuulennopeuden lauseke [20]

$$V_{crD} = \sqrt{2 k_T / \frac{\partial C_M}{\partial \alpha} \rho b^2 L_i}. \quad (103)$$

Jäykistyspalkin vääntöjäykkyyden ja momenttikertoimen derivaatan mahdollisten arvojen perusteella divergenssin kriittinen tuulennopeus on suuri.

5.9.2 Laukkaamisilmiö

Laukkaamisilmiön mallintamiseksi tarkastellaan kuvan 7 mukaista systeemiä, missä rakenteen liike on rajoitettu tuulta vastaan kohtisuoraan liikkeeseen. Voimatasapainon perusteella liikeyhtälö (25) saa muodon

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = -F_L \cos\alpha - F_D \sin\alpha \approx -F_L - \frac{\dot{y}}{V} F_D = -F_L - \frac{1}{2} \rho b L_i C_D V \dot{y}. \quad (104)$$

Nostovoimakomponentin aproksimaatio on yhtälöiden (84) ja (86) mukaisesti

$$F_L = \frac{1}{2} \rho b L_i (C_L + \alpha \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}) V^2 = \frac{1}{2} \rho b L_i (C_L + \frac{\dot{y}}{V} \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}) V^2, \quad (105)$$

Sijoittamalla (105) liikeyhtälöön (104) saadaan

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = -\frac{1}{2} \rho b L_i V (\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} + C_D) \dot{y} - \frac{1}{2} \rho b L_i C_L V^2. \quad (106)$$

Nopeuteen verrannollisten termien perusteella havaitaan, että koska vaimennuskerroin c on nollaa suurempi, negatiivinen vaimennus on mahdollista, kun

$$\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} + C_D < 0. \quad (107)$$

Tämä on ns. *Den Hartogin* kriteeri [22]. Yhtälön (107) soveltamisessa on huomattava, että esitetyssä tapauksessa vastuskerroin C_D on annettu poikkileikkauksen leveyden b funktiona (kitkavastus on hallitseva). Kriittinen tuulennopeus laukkaamisilmiölle saadaan asettamalla vaimennus nolaksi, eli

$$c + \frac{1}{2} \rho b L_i V (\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} + C_D) = 0, \quad (108)$$

josta esittämällä vaimennuskerroin vaimennussuhteen avulla saadaan

$$V_{crG} = \frac{4\xi m \omega_y}{\rho b L_i (-\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} - C_D)}, \quad (109)$$

missä ω_y on rakenteen ominaistajuus (tuulta vastaan kohtisuora liike).

5.9.3 Pyörteiden irtaantuminen

Vinoköysisillan tapauksessa kriittisinä tuulennopeuksina pyörteiden irtaantumisen johdosta tapahtuvalle epästabiiliudelle voidaan pitää tuulennopeuden arvoja, joilla köysivärähtelyjen amplitudi kasvaa haitallisen suureksi. Koska nämä arvot ovat riippuvaisia rakenneratkaisuista, yksikäsitteisiä arvoja ei voida antaa.

Tuulennopeudet, joilla pyörteiden irtaantumisesta aiheutuva epästabiilius voi esiintyä, saadaan kaavasta (3). Köyden amplitudin määrittämiseksi voidaan käyttää rakennemallia, jossa köyttä kuormittaa normaalivoiman suunnassa harmoninen voima p_N - jonka taajuus on kansirakenteen ensimmäinen ominaistajuus (pystysuuntainen liike) ja tuulta vastaan kohtisuorassa suunnassa harmoninen voima p_L - jonka taajuus on köyden ensimmäinen ominaistajuus f_1 . p_N :n amplitudi on arvioitava kansirakenteen vasteen perusteella. p_L pituusyksikköä kohden saadaan iteraatioyhteydestä [27]

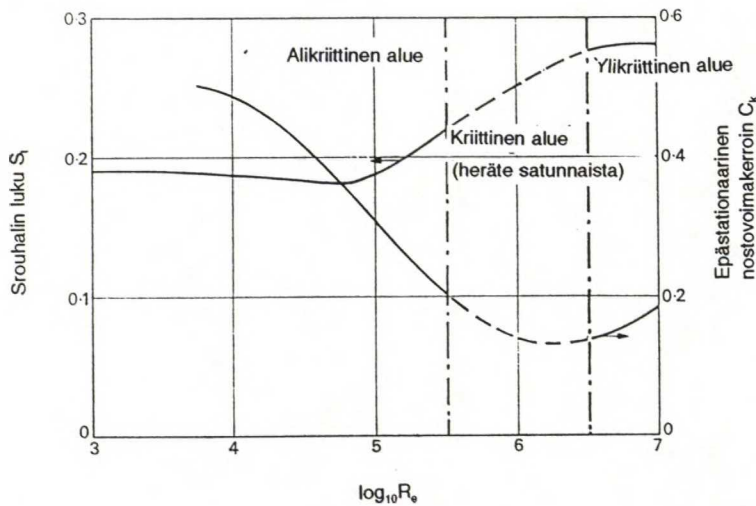
$$\begin{aligned} i) \quad V_{cr} &= f_1 \frac{d_{eff}}{St}, \\ ii) \quad p_L &= \frac{1}{2} \rho C_K V_{cr}^2 d_{eff} \sin(2\pi f_1 t), \\ iii) \quad d_{eff} &= d_{eff} \left(1 + 1.54 \frac{x}{d_{eff}}\right). \end{aligned} \quad (110)$$

Tällöin C_K on tuulitunnelikokeiden perusteella määritetty epästationaarinen nostovoimakerroin, d_{eff} on köyden efektiivinen halkaisija (jonka arvo kasvaa köyden alkaessa värähdellä) ja x on värähtelyn amplitudi. Kaavassa (110) toistetaan vaiheet i), ii) ja iii), kunnes tasapainotila saavutetaan. C_K :n arvot saadaan kuvasta 27.

Toinen karkeampi aproksimaatio p_L :lle saadaan olettamalla $C_K = 1$ ja $d_{eff} = d$, eli kaavamuodossa

$$p_L = \frac{1}{2} \rho d V_{cr}^2 \sin(2\pi f_1 t), \quad (111)$$

josta saadaan käyttökelpoisia arvoja R_e :n alueella $10^2 \dots 10^7$ [22].



Kuva 27. Ympyräpoikkileikkauksen epästationaarinen nostovoimakerroin C_K Reynoldsin luvun R_e funktiona ja R_e :n riippuvuus Strouhalin luvusta [23]. R_e on annettu ympyrän halkaisijan suhteen.

5.9.4 Flutteri

Kriittisten tuulennopeuksien määrittäminen luotettavasti vääntö- ja klassiselle flutterille edellyttää rakenneseosan liiketilan huomioon ottavien tuulitunnelikokeiden suorittamista. Flutteri-ilmiötä on mallinnettu teoreettisesti lentokoneiden siiville, jotka kuitenkin poikkeavat aerodynaamisilta ominaisuuksiltaan yleisistä sillan kansipoikkileikkauksista.

Flutteri-ilmiöiden teoreettisessa mallintamisessa on esitettävä aproksimaatiot epästationaarisille aerodynaamisille voimalle F_L ja momentille F_M . *Scanlan* [21] on esittänyt näille flutterikertoimien A_i^* ja H_i^* avulla lausekkeet

$$\begin{cases} F_L = \rho V^2 b (k_F H_1^* \frac{\dot{y}}{V} + k_F H_2^* b \frac{\dot{\theta}}{V} + k_F^2 H_3^* \theta), \\ F_M = \rho V^2 b^2 (k_F A_1^* \frac{\dot{y}}{V} + k_F A_2^* b \frac{\dot{\theta}}{V} + k_F^2 A_3^* \theta), \\ k_F = b \frac{\omega}{V}. \end{cases} \quad (112)$$

Flutterikertoimet ovat k_F :n funktioita. Jos flutterikertoimet tunnetaan (tuulitunnelikokeiden perusteella), voidaan kriittiset tuulennopeudet määrittää kahden vapausasteen värähtelysteemin liikeyhtälöstä.

Joitain aproksimaatioita on esitetty sillan flutterin kriittiseksi tuulennopeudeksi, esimerkkinä *Selbergin* [21] kaava klassiselle flutterille

$$V_{crF} = 3.7 f_T b \sqrt{\frac{mr}{\rho b^3} \left[1 - \left(\frac{f_z}{f_T} \right)^2 \right]}, \quad (113)$$

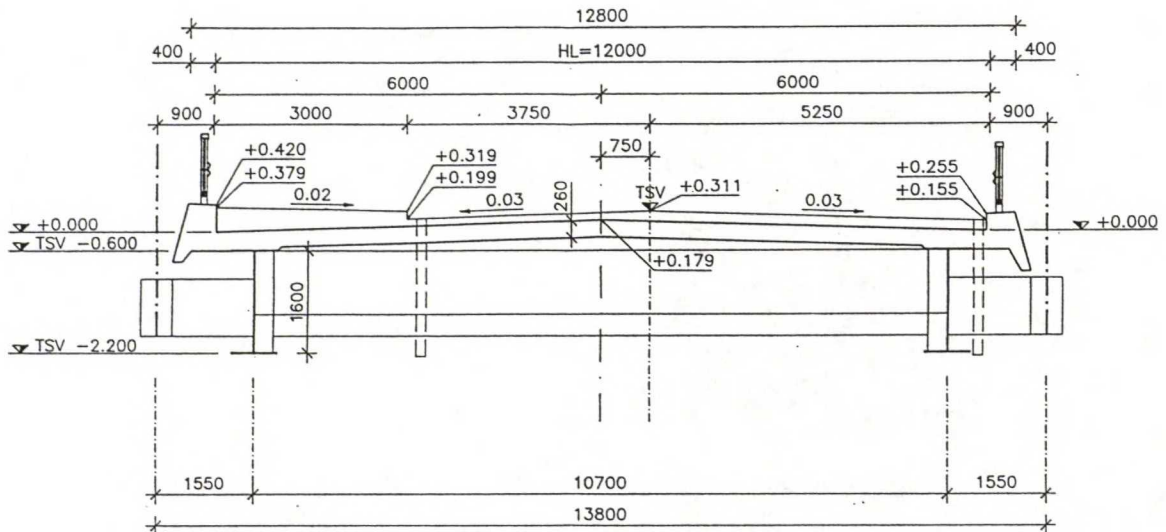
jossa f_T on jäykistyspalkin vääntövärähtelyn ominaistajuuus, f_z pystysuuntaisen liikkeen ominaistajuuus, m massa pituusyksikköä kohden ja r vääntöliikkeen hitaussäde (*mass radius of gyration*). Kaava (113) on sovellettavissa poikkileikkauksille, jotka ovat siipimäisiä ja virtaviivaisia. Muille kansipoikkileikkauksille kaavaa (113) sovelletaan pienentämällä V_{crF} :n arvoa kokeellisesti määritetyllä kertoimella k_f . k_f :n arvoja [25] on taulukoitu liitteessä C. Kaavasta (113) saadaan arvio myös vääntöflutterin kriittiselle tuulennopeudelle (joka on suurempi kuin klassisen flutterin) asettamalla $f_z = 0$.

Vääntöliikkeen hitaussäde voidaan määrittää likimääräisestä yhteydestä [21]

$$f_T = \frac{b}{2r} f_z. \quad (114)$$

6. Laskentamallin sovellus Kärkistensalmen vinoköysisiltaan

Kärkistensalmi sijaitse Päijänteessä n. 20 km Jyväskylästä etelään. Salmen yli suunnitellaan olevan sillan (kuva 1) jännemitta on 240 m ja kokonaispituus 788 m. Pylonien korkeudet ovat 95 ja 65 m. Silta on liittorakenteinen. Sillan kansipoikkileikkaus on esitetty kuvassa 28. Köydet kiinnitetään levykannattajiin hitsattuihin kiinnikkeisiin.



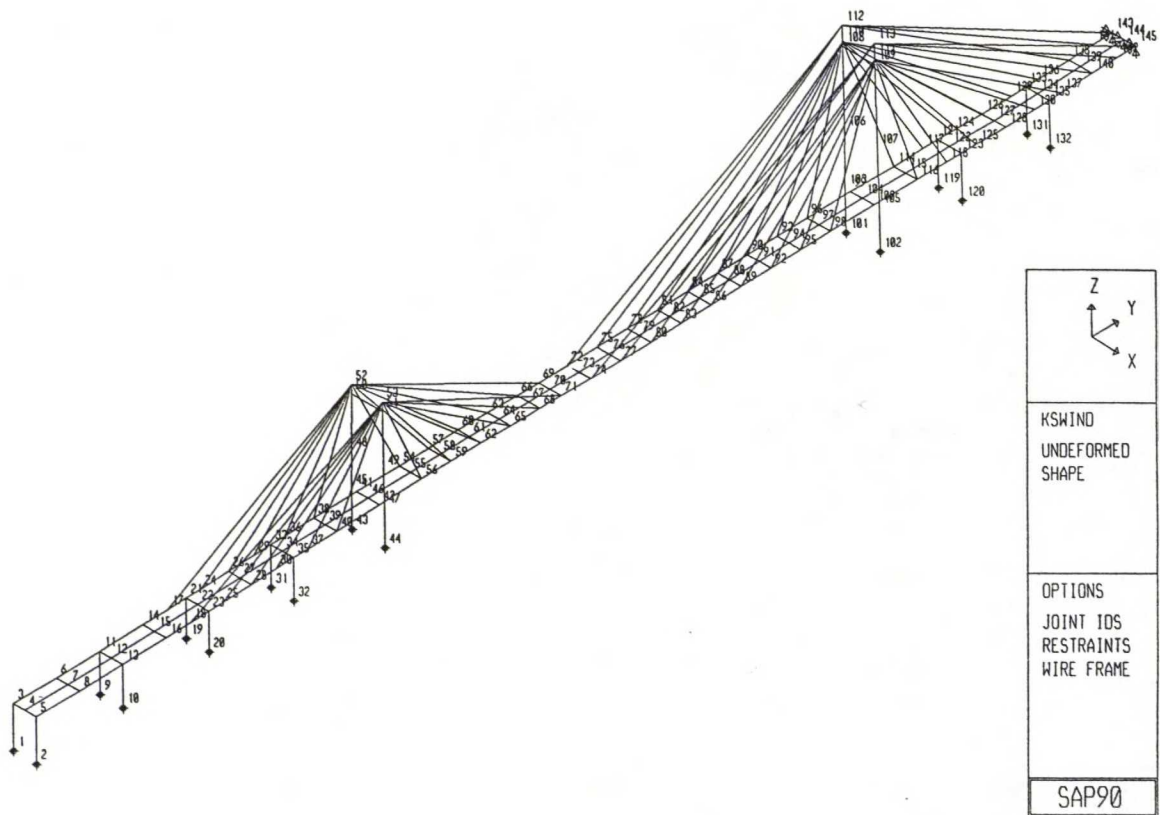
Kuva 28. Kärkistensalmen vinoköysisillan kansipoikkileikkaus.

6.1 Valmis silta

Valmiin sillan dynaamisen analyysin rakennemalli on esitetty kuvassa 29. Rakennemallin kannen reunan palkkielementeillä kuvataan liittopalkit ja niiden väliin jäävillä elementeillä kansilaatan ja sen jäykistysristikoiden vaikutus. Rakennemallin koon rajoittamiseksi on malli katkaistu solmupisteiden 3, 4 ja 5 kohdalta. Rakenteen jatkuvuus on otettu huomioon asettamalla näihin pisteisiin jousituenta. Sillan toisen pään tuenta (solmupisteet 143, 144 ja 145) on nivelellinen.

Pienemmän pylonin ja kannen nivelellinen liitos on mallinnettu siten että solmupisteen 41 siirtymäkomponentit X,Y,Z on asetettu yhtä suuriksi pisteen 45 siirtymäkomponenttien kanssa (vastaavasti 42 = 47). Suurempi pyloni tukee kantta ainoastaan X ja Z suunnassa, mikä on otettu huomioon asettamalla solmupisteiden 99 ja 103 sekä 100 ja 105 siirtymäkomponentit X ja Z yhtäsuuriksi. Köysiä kuvaavien palkkielementtien päiden momentit on asetettu nolaksi (köysien taivutusjäykkyyttä ei oteta huomioon).

Rakennemallista lasketut ominaismuodot ja taajuudet on esitetty kuvassa 32. Sauvaelementtien normaalivoimien vaikutus geometrisen jäykkyyteen, ja siten ominaistaajuuksiin on otettu huomioon kaikille elementeille. Sauvaelementtien normaalivoimat on arvioitu omanpainon perusteella (1,2 kertaa omanpainon aiheuttama normaalivoima).



Kuva 29. FEM-laskennan rakennemalli valmiille sillalle.

6.1.1 Tuulikuorman parametrit ja vasteen staattinen osa

Rakennuskohteen sijainnin perusteella on referenssituulennopeus [18] 21 m/s vastaten kerran 10:ssä vuodessa esiintyvää V_{10} :n arvoa. Ympäröivän maaston karheusluokka [18] on II ja sitä vastaava karheusparametri z_0 on 0,07 m [18].

Tuulen keskinopeuden suunnitteluarvon määrittämiseksi kerrotaan referenssituulennopeus tilastokertoimella [18] 1,1. Saatu keskinopeuden suunnitteluarvo 23,1 m/s vastaa kerran 50:ssä vuodessa esiintyvää V_{10} :n arvoa. TV-ohjelmistolla laskettu tuulen keskinopeuden jakauma on esitetty taulukossa 1. 10 m korkeudella lasketun keskinopeuden (23,2 m/s) ja referenssituulennopeuden (23,1 m/s) ero johtuu korkeusjakauman määräävän (lähteen 18 mukaisen) kaavan vakioiden epätarkkuudesta. Koherenssin määräävien vakioiden arvona (kaava 81) on käytetty varmalla puolella olevia arvoja $C_x = C_y = 3$ ja $C_z = 6$.

Tuulikuorma on kohdistettu kannen keskilinjän sekä pylonien solmupisteille. Tuulen keskinopeuden suunta yhtyy X-akselin suuntaan. Tuulikuorman aiheuttamien solmupistekuormien muodostamiseksi on arvioitu voimakertoi-

mien arvot. Voimakertoimet on määritetty ottamatta huomioon kannella olevaa liikennettä. Voimakertoimien arvot ovat:

Kansi: $C_D = 2,3$ arvioituna lähteestä [18] (1,3 tuulenpuoleinen levy-palkki + 1,0 tuulen alapuolella oleva levypalkki). Momenttiker-roin $C_M = 0,8$ on laskettu vastusvoiman vaikutuspisteen ja kansipoikkileikkauksen vääntökeskiön välisen etäisyyden perusteella. Nostovoimakerroin ja voimakertoimien derivaatto-jen arvot on arvioitu karkeasti kuvasta 24 - arvot ovat:
 $C_L = -0,02$, $dC_D = 0,0$, $dC_L = -0,1$ ja $dC_M = 0,2$

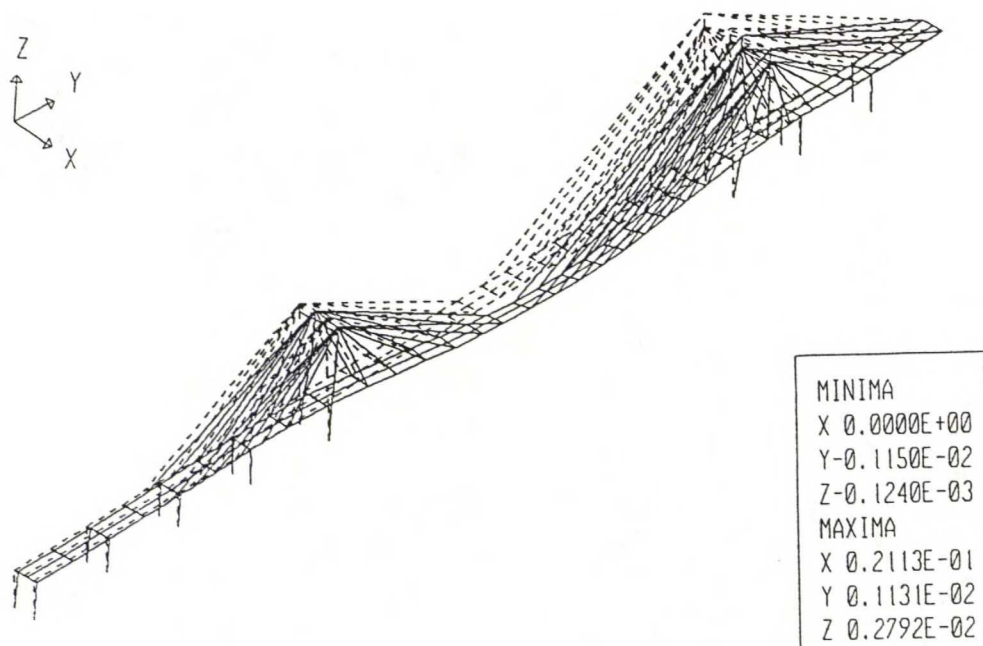
Pyloni: Pylonien poikkileikkaus on likimain tasasivuinen kolmio. Pylonil-le on käytetty kahta vastuskertoimen arvoa: tuulenpuoleinen pyloni $C_D = 0,8$ (kolmion kärki tuulta vastaan) ja $C_D = 1,3$ tuulen alapuolella oleva pyloni (kolmion särmä tuulta vastaan). Vastuskertoimet on arvioitu lähteestä [18]. Muut vastusketoimet on asetettu nolliksi.

Tuulen keskinopeutta vastavien staattisten voimakomponenttien aiheuttama siirtymätila on esitetty kuvassa 30.

Taulukko 1. Tuulen dynaamisen vaikutuksen laskennassa käytetty tuulen keskinopeuden korkeusjakauma, turbulenssin intensiteetti ja -skaala (*integral lenght scale*, kaava 75). Suluissa esitetyt keskinopeudet ovat staattisessa analyysissä käytettäviä arvoja.

TUULIKUORMAN NOPEUSJAKAUMA, $V_{ref} = 23.1$ m/s, KARKEUSLUOKKA 2, $z_0 = .070$ m

$z = 5$ m,	$V_o = 19.9$ m/s,	$I_u = .23$,	$(V_k = 32.4$ m/s),	$L_x = 82.4$ m
$z = 10$ m,	$V_o = 23.2$ m/s,	$I_u = .20$,	$(V_k = 35.9$ m/s),	$L_x = 82.4$ m
$z = 15$ m,	$V_o = 25.0$ m/s,	$I_u = .19$,	$(V_k = 38.0$ m/s),	$L_x = 82.4$ m
$z = 20$ m,	$V_o = 26.4$ m/s,	$I_u = .18$,	$(V_k = 39.5$ m/s),	$L_x = 160.8$ m
$z = 25$ m,	$V_o = 27.4$ m/s,	$I_u = .17$,	$(V_k = 40.6$ m/s),	$L_x = 160.8$ m
$z = 30$ m,	$V_o = 28.3$ m/s,	$I_u = .17$,	$(V_k = 41.5$ m/s),	$L_x = 225.8$ m
$z = 35$ m,	$V_o = 29.0$ m/s,	$I_u = .16$,	$(V_k = 42.3$ m/s),	$L_x = 225.8$ m
$z = 40$ m,	$V_o = 29.6$ m/s,	$I_u = .16$,	$(V_k = 43.0$ m/s),	$L_x = 282.1$ m
$z = 45$ m,	$V_o = 30.2$ m/s,	$I_u = .15$,	$(V_k = 43.5$ m/s),	$L_x = 282.1$ m
$z = 50$ m,	$V_o = 30.7$ m/s,	$I_u = .15$,	$(V_k = 44.1$ m/s),	$L_x = 319.4$ m
$z = 55$ m,	$V_o = 31.1$ m/s,	$I_u = .15$,	$(V_k = 44.5$ m/s),	$L_x = 319.4$ m
$z = 60$ m,	$V_o = 31.5$ m/s,	$I_u = .15$,	$(V_k = 45.0$ m/s),	$L_x = 347.3$ m
$z = 65$ m,	$V_o = 31.9$ m/s,	$I_u = .15$,	$(V_k = 45.4$ m/s),	$L_x = 347.3$ m
$z = 70$ m,	$V_o = 32.2$ m/s,	$I_u = .14$,	$(V_k = 45.7$ m/s),	$L_x = 375.1$ m
$z = 75$ m,	$V_o = 32.6$ m/s,	$I_u = .14$,	$(V_k = 46.1$ m/s),	$L_x = 375.1$ m
$z = 80$ m,	$V_o = 32.9$ m/s,	$I_u = .14$,	$(V_k = 46.4$ m/s),	$L_x = 402.9$ m
$z = 85$ m,	$V_o = 33.1$ m/s,	$I_u = .14$,	$(V_k = 46.7$ m/s),	$L_x = 402.9$ m
$z = 90$ m,	$V_o = 33.4$ m/s,	$I_u = .14$,	$(V_k = 47.0$ m/s),	$L_x = 411.9$ m
$z = 95$ m,	$V_o = 33.7$ m/s,	$I_u = .14$,	$(V_k = 47.2$ m/s),	$L_x = 411.9$ m
$z = 100$ m,	$V_o = 33.9$ m/s,	$I_u = .14$,	$(V_k = 47.5$ m/s),	$L_x = 430.6$ m



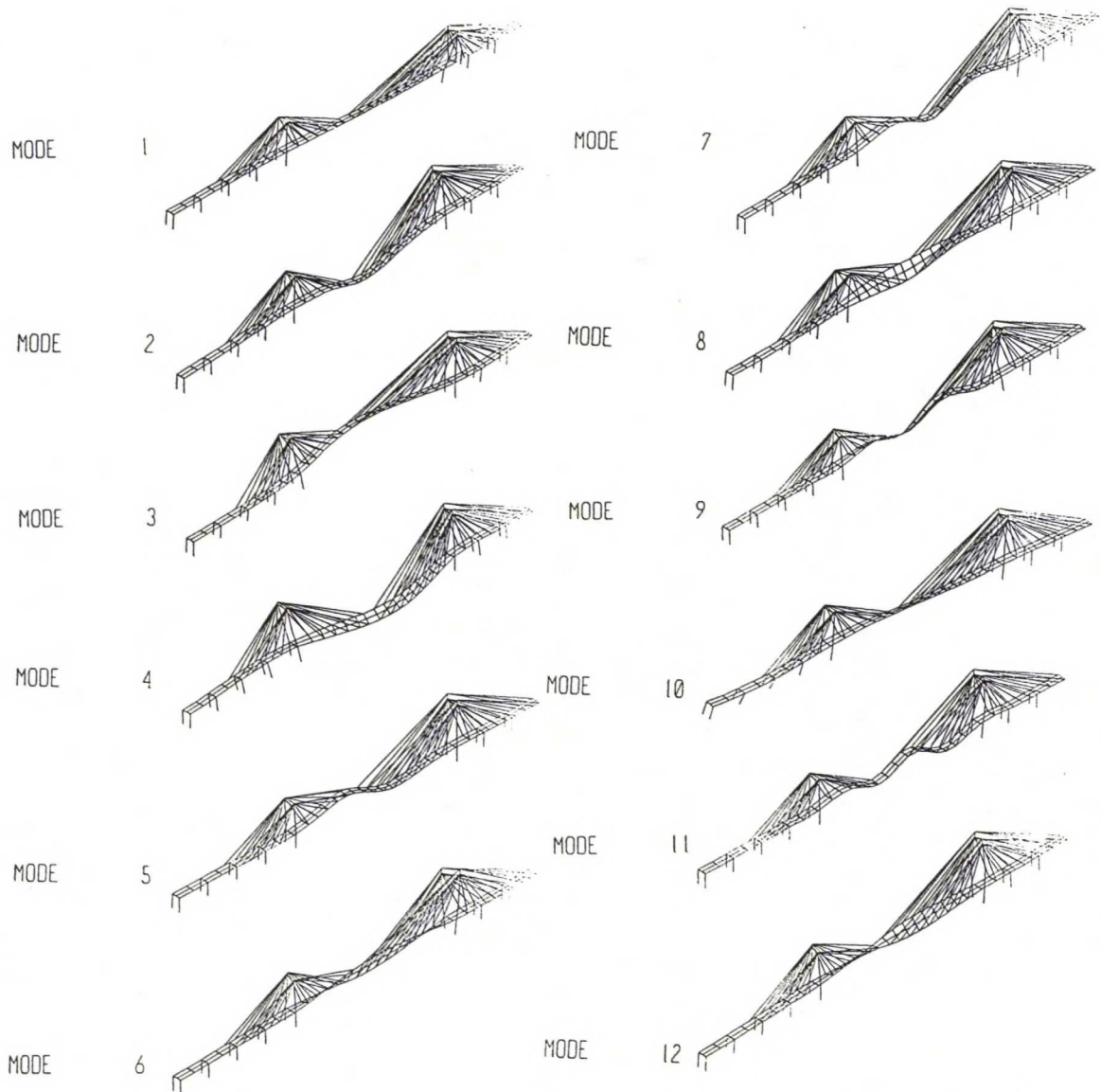
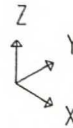
Kuva 30. Siirtymätila tuulikuorman staattisesta osasta.

6.1.2 Vasteen dynaaminen osa

Dynaaminen analyysi on suoritettu TV-ohjelmistolla (liite B). Ominaismuotokohtaiset mekaanista vaimennusta vastaavat vaimennussuhteet on arvioitu lähteestä [21]. Käytetyt arvot ovat 0,002 ensimmäiselle ominaismuodolle ja muille 0,003.

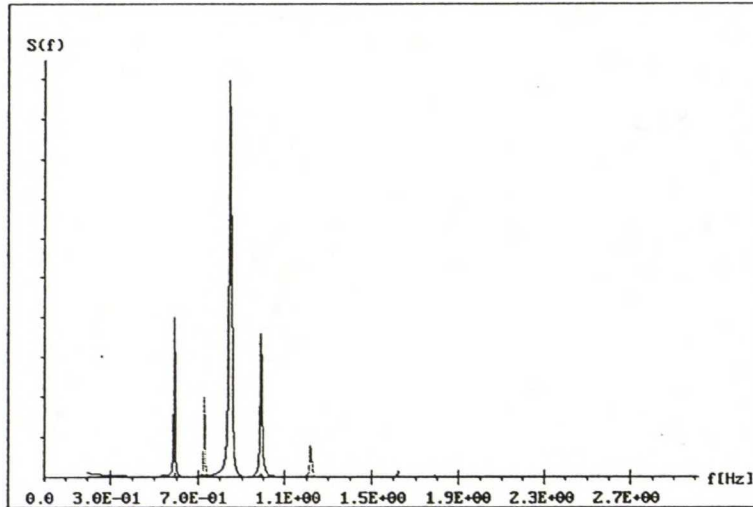
Vasteen tehospektrin tiheysfunktio on laskettu taajuusalueella 0,2...3,0 Hz inkrementin ollessa 0,0056 Hz. Kuvassa 32 on esitetty lasketut funktiot kannen solmupisteelle 74 ja kuvassa 33 suuremman pylonin huippupisteelle 113. Alemmat kuvaajat ovat logaritmiasteikolle piirrettyjä ja ylemmät lineaariselle. Kuvaajista määritetyt tunnusluvut on esitetty taulukossa 2. Vasteen dynaamisen osan ääriarvojen keskiarvo on laskettu Davenportin kaavasta (66) T:n arvolla 10 min. Vasteen maksimiarvo on staattisen osan ja dynaamisen osan ääriarvojen keskiarvon summa.

MODE NUMBER	EIGENVALUE (RAD/SEC)**2	CIRCULAR FREQ (RAD/SEC)	FREQUENCY (CYCLES/SEC)	PERIOD (SEC)
1	0.138095E+02	0.371611E+01	0.591438	1.690796
2	0.208598E+02	0.456725E+01	0.726901	1.375704
3	0.281967E+02	0.531005E+01	0.845121	1.183262
4	0.386879E+02	0.621996E+01	0.989937	1.010165
5	0.403601E+02	0.635296E+01	1.011105	0.989017
6	0.588597E+02	0.767201E+01	1.221038	0.818975
7	0.777180E+02	0.881578E+01	1.403075	0.712720
8	0.103978E+03	0.101969E+02	1.622895	0.616183
9	0.104461E+03	0.102206E+02	1.626661	0.614756
10	0.127226E+03	0.112795E+02	1.795183	0.557046
11	0.138206E+03	0.117561E+02	1.871044	0.534461
12	0.166480E+03	0.129027E+02	2.053533	0.486966

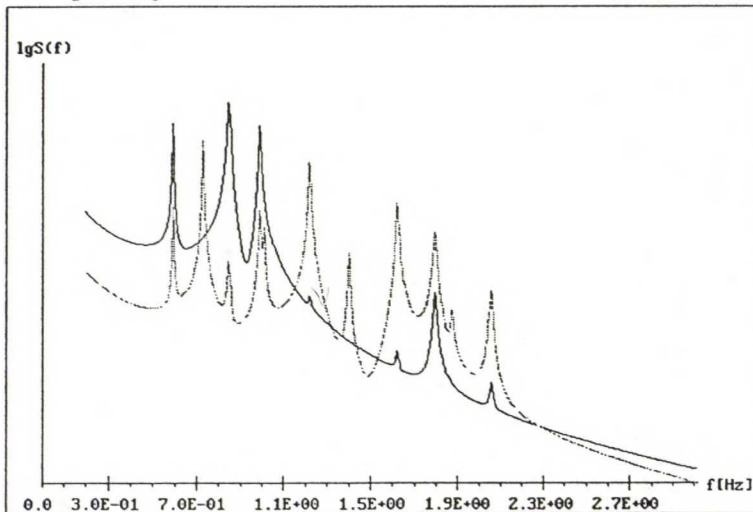


Kuva 31. Lasketut 12 ensimmäistä ominaismuotoa ja taajuutta (vaimentamaton rakenne).

TIEDOSTO: kswind/solmupiste: 74 PVM: 28.01.1993 TUPOST-uer1.1/TIEH/R.Kiviluoma
X-siirtymä: khaj = 1.139E-02, teholf = .794, S(fr) max = 8.122E-04, fr = .844
Z-siirtymä: khaj = 4.345E-03, teholf = 1.009, S(fr) max = 1.603E-04, fr = .726



TIEDOSTO: kswind/solmupiste: 74 PVM: 28.01.1993 TUPOST-uer1.1/TIEH/R.Kiviluoma
X-siirtymä: khaj = 1.139E-02, teholf = .794, S(fr) max = 8.122E-04, fr = .844
Z-siirtymä: khaj = 4.345E-03, teholf = 1.009, S(fr) max = 1.603E-04, fr = .726



Kuva 32. Vasteen tehospektrin tiheysfunktiot kannen solmupisteelle 74.

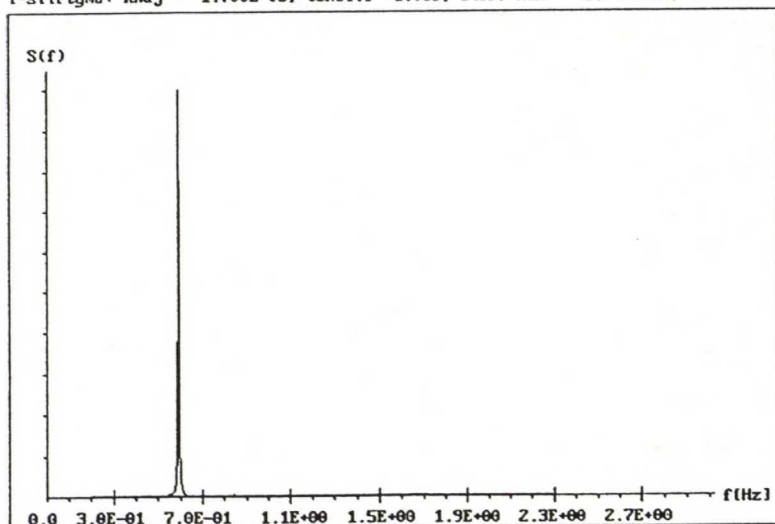
Värähtelyn fysiologisen vaikutuksen kuvaamiseen käytetyt kiihtyvyyden maksimiarvot ovat kansirakenteen X-suuntaiselle värähtelylle $1,2 \text{ m/s}^2$ ja Z-suuntaiselle värähtelylle $0,3 \text{ m/s}^2$ (kiihtyvyys on laskettu derivoimalla harmonisen liikkeen liikeyhtälö kahdesti ajan suhteen ja käyttämällä amplitudina vasteen dynaamisen osan ääriarvojen keskiarvoa).

Kuvan 31 mukaisesti on kansirakenteen vääntövärähtelyn ja pystysuuntaisen liikkeen ominaistajuuksien suhde 1,7. Arvioimalla rakenteen vääntöliikkeen hitaussäde kaavasta (114) saadaan kriittisen flutterinopeuden perusarvoksi kaavasta (113) 141 m/s . Perusarvoa on pienennettävä liitteesä C esitetyillä kertoimilla. Määritetyt kriittiset flutterinopeudet eri kohtauskulman arvoilla on esitetty taulukossa 3.

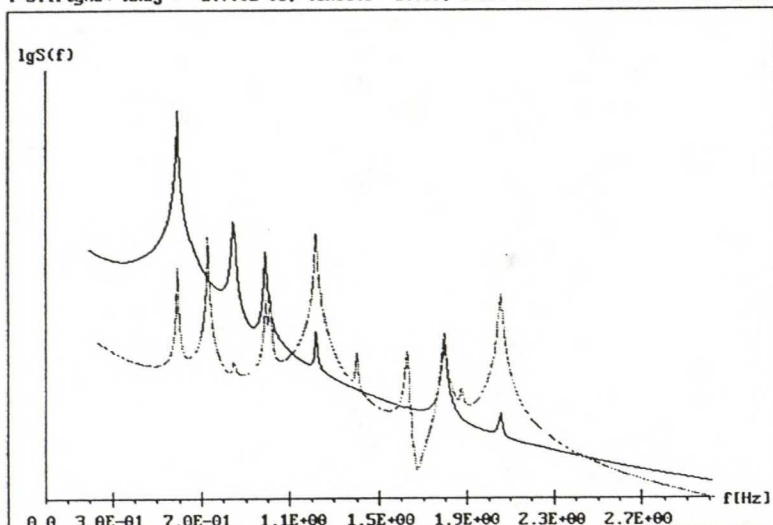
Kansirakenteen kimmainen vääntöjäykkyys on määritetty rakennemallista asettamalla solmupisteeseen 74 pistekuorma (1 MN) ja laskemalla kannen vääntökulma. Kimmoisaksi vääntöjäykkyydeksi on saatu $k_T = 842 \text{ MNm}^2$.

Kriittinen tuulennopeus divergenssille saadaan kaavasta (103). Koska momenttikertoimen derivaatan arvoa ei ole voitu luotettavasti määrittää, ei kriittistä tuulennopeutta ole laskettu.

TIEDOSTO: kswind/solmupiste:113 PVM: 28.01.1993 TUPOST-ver1.1/TIEH/R.Kiviluoma
X-siirtymä: kha_j = 2.387E-02, tehol.f = .586, S(fr) max = 1.853E-02, fr = .592
Y-siirtymä: kha_j = 1.790E-03, tehol.f = 1.069, S(fr) max = 1.735E-05, fr = 1.219



TIEDOSTO: kswind/solmupiste:113 PVM: 28.01.1993 TUPOST-ver1.1/TIEH/R.Kiviluoma
X-siirtymä: kha_j = 2.387E-02, tehol.f = .586, S(fr) max = 1.853E-02, fr = .592
Y-siirtymä: kha_j = 1.790E-03, tehol.f = 1.069, S(fr) max = 1.735E-05, fr = 1.219



Kuva 33. Vasteen tehospektrin tiheysfunktiot pylonin solmupisteelle 113.

Taulukko 2. Valmiin sillan tunnusluvut.

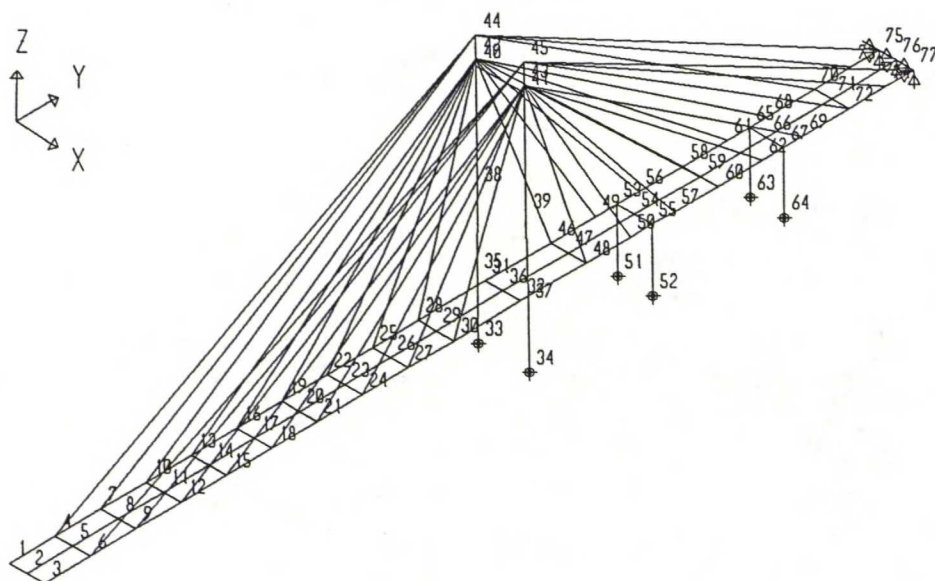
Solmupiste		siirtymän staattinen osa [m]	dynaamisen osan keski- hajonta [m]	tehollinen taajuus [Hz]	ääriarvojen keskiarvo [m]	siirtymän maksimi- arvo [m]
numero	suunta					
74	X	0,017	0,011	0,844	0,041	0,058
74	Z	0,003	0,004	0,726	0,015	0,018
113	X	0,021	0,024	0,586	0,086	0,107
113	Y	0,001	0,002	0,707	0,007	0,008

Taulukko 3. Lasketut flutterinopeudet eri kohtauskulman arvoilla.

perusarvo [m/s]	$V_F(\alpha=0^\circ)$ [m/s]	$V_F(\alpha=+5^\circ)$ [m/s]	$V_F(\alpha=-5^\circ)$ [m/s]	$V_F(\alpha=+10^\circ)$ [m/s]	$V_F(\alpha=-10^\circ)$ [m/s]
141	79	133	54	141	44

6.2 Rakennusvaihe

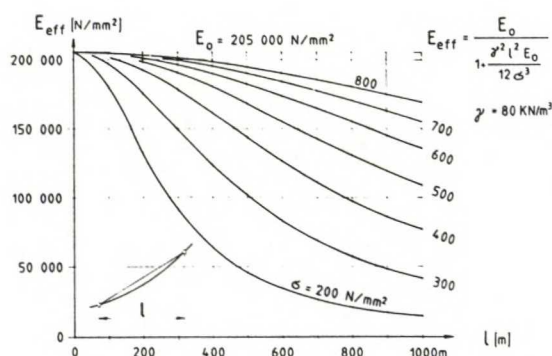
Silta rakennetaan ulokemenetelmällä, jolloin se on rakennusvaiheessa erityisen altis tuulen vaikutukselle. Rakennusvaiheen analyysi on tehty kuvan 34 mukaisella rakennemallilla.



Kuva 34. Rakennusvaiheen rakennemalli.

Mallilla kuvataan tilannetta, jossa kannen pää pääsee vapaasti liikkumaan ja betonikansi on valamatta. Rakennusvaiheen sillan laskentamallin parametrit poikkeavat valmiin sillan mallista seuraavilta osin:

- 1) Tuulen keskinopeuden suunnitteluarvona on käytetty kerran kymmenessä vuodessa esiintyvää arvoa (21 m/s).
- 2) Jäykistyspalkin omapaino muodostuu teräsrakenteiden, muottien ja koneiden painosta.
- 3) Pylonin betonin kimmokerointa on alennettu vastaten tuoreen betonin lujuudenkehitystä.
- 4) Nostovoimakertoimen arvoa on pienennetty kansilaatan puuttumisen johdosta.
- 5) Kansirakenteen mekaanista vaimennusta on pienennetty (vaimennus muodostuu teräsrakenteen vaimennuksen perusteella).
- 6) Köysien tehokasta kimmokerointa on pienennetty johtuen köysien pienemmästä jännityksestä ja siitä seuraavasta riippuman kasvusta. Kuvassa 35 on esitetty köyden tehokkaan kimmokertoimen arvo E_{eff} köysijännityksen ja köyden pituuden funktiona.



Kuva 35. Köyden tehollinen kimmokerroin [21].

Laskennan kulku vastaa kohdan 6.1 mukaista mallilaskentaa. Laskennan lähtöarvot ja tulosteet on esitetty liitteessä D. Tulokset on koottu taulukkoon 4.

Taulukko 4. Valmistusvaiheen tunnusluvut.

Solmupiste		siirtymän staattinen osa [m]	dynaamisen osan keski- hajonta [m]	tehollinen taajuus [Hz]	ääriarvojen kaskiarvo [m]	siirtymän maksimi- arvo [m]
numero	suunta					
3	X	0,339	0,441	0,246	1,474	1,813
3	Z	0,011	0,300	0,529	1,069	1,080
45	X	0,028	0,025	0,452	0,088	0,116
45	Y	0,006	0,007	0,532	0,025	0,031

6.3 Tulosten tarkastelu

Laskennan jäykkyys ym. parametrit on määritetty siltasuunnitelmista 20.1.93 käytettävissä olleiden tietojen perusteella. Köysien ja pylonien tiedot ovat tarkkoja; sen sijaan kansirakenteen parametrit, koherenssivakiot ja voimakertoimet on arvioitu karkeasti.

Käytetyllä keskinopeuden suunnitteluarvolla (23,1 m/s) eivät valmiin sillan värähtelyt muodostu haitallisiksi. Vasteen dynaamisen osan keskihajonta kasvaa kuitenkin verrannollisena tuulennopeuden neliöön - vertailun vuoksi laskettiin valmiin sillan rakennemalli 40 m/s keskinopeudella, jolloin kannen vasteen keskihajonnat olivat X-suuntaan 40 mm ja Z-suuntaan 16 mm. Nämä keskihajonnat ovat noin neljä kertaa suurempia kuin 23,1 m/s tuulennopeudella lasketut. Kriittiset tuulennopeudet flutterille ovat käytettyjen likikaavojen perusteella suuria, joten sillan pitäisi olla stabiili klassisen- ja vääntöflutterin suhteen.

Jos silta rakennetaan ulokemenetelmällä siten, että kannen betonointi suoritetaan jälkikäteen (kuten laskentamallissa on oletettu), on suoritettun laskennan perusteella varauduttava jäykistyspalkin vapaan pään harustamiseen.

Geometrisen jäykkyyden vaikutus ominaistajuuksiin on suurimmillaan 0,01 Hz luokkaa. Laskettu moodikohtainen vaimennussuhde aerodynaamisesta vaimennuksesta on ensimmäisille ominaismuodoille n. 3% eli moninkertainen verrattuna oletettuun mekaaniseen vaimennukseen.

Vasteen tehospektrin tiheysfunktioita tarkastelemalla voidaan todeta lähes kaiken värähtelyenergian keskittyneen ensimmäisiin ominaismuotoihin, jotka siten määräävät rakenteen dynaamisen toiminnan. Vastaavat taajuu-det ovat lähellä vaimentamattoman värähtelyn ominaistajuuksia.

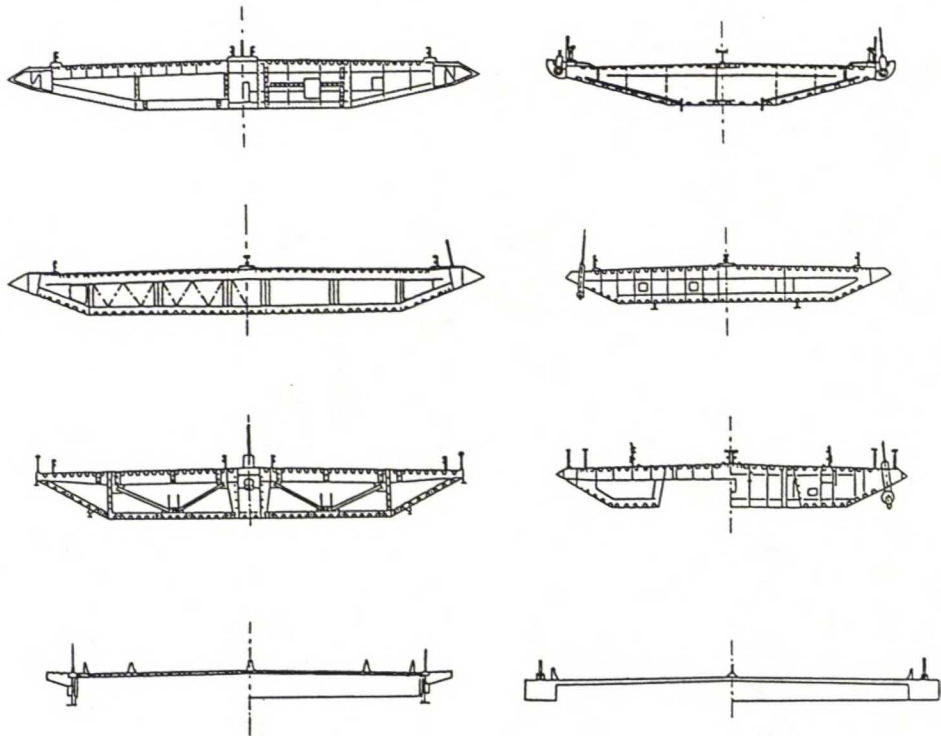
Koska laskentamallia ei ole testattu todelliseen kohteeseen, on virhearviointia vaikea tehdä. Norjassa on käytössä ainakin yksi vastaavaan teoriaan perustuva ohjelmisto [2], jolla saadut tulokset ovat olleet raportoinnin mukaan tarkkoja. Mallin testaamiseksi laskenta voidaan suorittaa uudelleen, kun Kärkistensalmen sillan suunnitelmat ovat valmiit, silta rakennettu ja todelliset vasteet mitattavissa. Voimakertoimien arvojen määrittämiseksi olisi suoritettava tuulitunnelikokeita.

7. Suunnitteluratkaisuja dynaamisen stabiiliuden varmistamiseksi

Tuulikuorman aiheuttamiin ilmiöihin on käytännössä jouduttu- ja joudutaan varautumaan suurten vinoköysisiltojen suunnittelussa. Suunnitteluratkaisut sillan aerodynaamisen stabiiliuden varmistamiseksi voidaan jaotella lyhyesti seuraavasti [20]:

- a) valitaan aerodynaamisesti edullinen poikkileikkausmuoto,
- b) varmistetaan rakenteen riittävä (vääntö-) jäykkyys,
- c) lisätään mekaanista vaimennusta.

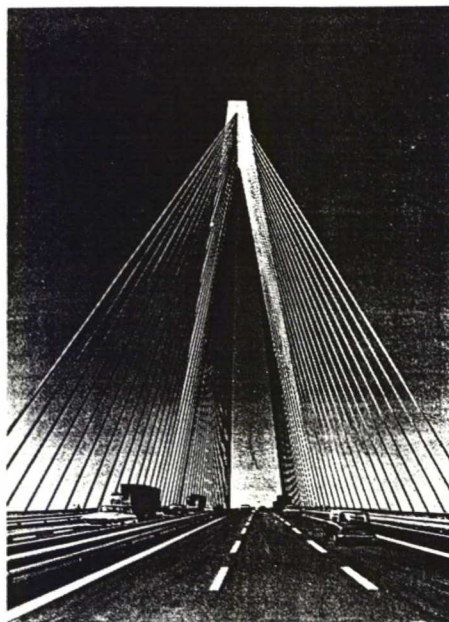
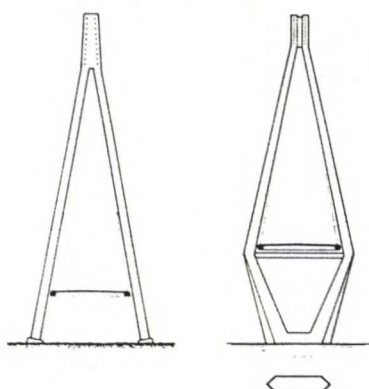
Jäykistyspalkin poikkileikkausmuodolla on keskeinen vaikutus tuulen aiheuttamien epästabiiliusilmiöiden esiintymiseen. Edullinen poikkileikkaus olisi siipimäinen matala profiili. Tällainen poikkileikkaus on toisaalta vaikea jäykistää. Korkeat levypalkit ovat esimerkkejä epäedullisista poikkileikkauksista. Kuvassa 36 on esitetty joitain edistysellisiä poikkileikkaustyyppejä.



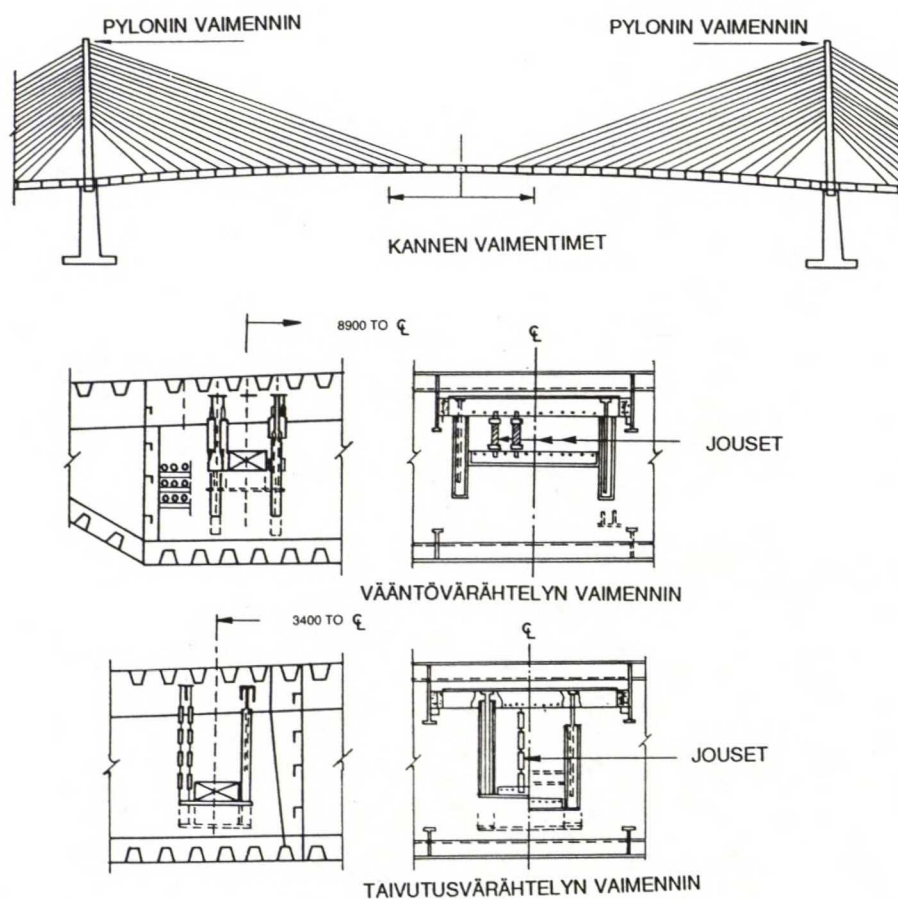
Kuva 36. Aerodynaamisesti edullisia poikkileikkauksia [21].

Epästabiiliusilmiöt voidaan estää tekemällä rakenne riittävän jäykäksi. Jäykistyspalkin vääntöjäykkyyttä voidaan lisätä avaruusristikolla. Sillan vääntöjäykkyyteen voidaan vaikuttaa pylonin tyypin valinnalla ja ohjaamalla köydet yhteen pylonin huipulla (kuva 37).

Mekaanista vaimennusta voidaan lisätä ulkoisilla vaimentimilla. Erilaisilla *jousi-massa-vaimennin* - systeemeistä muodostetuilla värähtelyenergian absorboijilla (*tuned mass dampers*) voidaan rajoittaa resonanssiajauksien amplitudia. Kuvassa 38 on esitetty eräs toteutettu kansirakenteen vaimennussysteemi.



Kuva 37. Vääntöjäykkyyden kannalta edullinen köysien ja pylonin geometria [21].



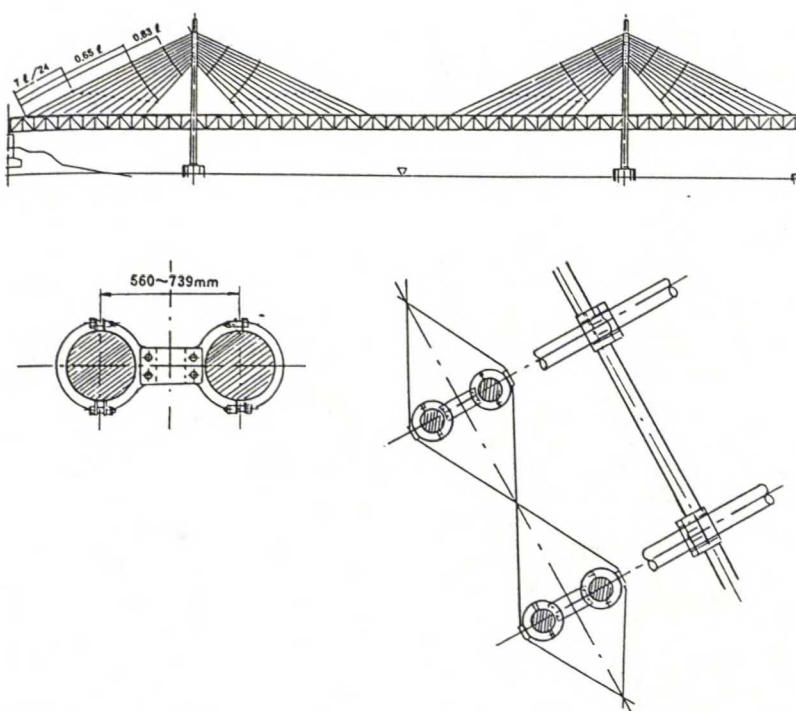
Kuva 38. Esimerkki jäykistyspalkkiin asennetuista vaimentimista [15].

Edellisten passiivisten ratkaisujen lisäksi sillan aerodynaamista toimintaa on suunniteltu parannettavaksi aktiivisten järjestelmien kautta, esim. kannen reunoille asennettujen tietokoneohjattujen siivekkeiden avulla [1].

7.1 Köysivärähtelyjen rajoittaminen

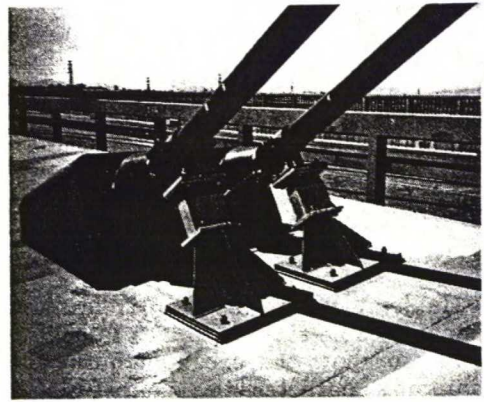
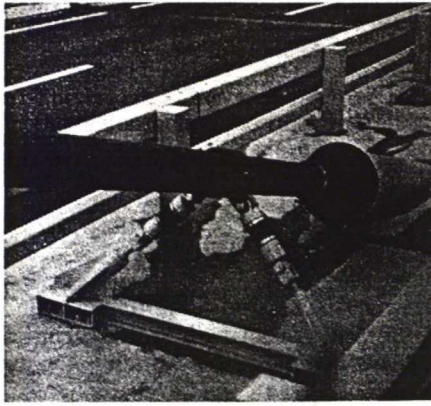
Köysivärähtelyjen haitallisen suuri amplitudi on käytännössä useimmin esille tuleva tuulikuorman aiheuttama ongelma. Rakenteellisessa mielessä epäedullinen tilanne on, kun kannen pystysuuntaisen liikkeen ja köyden ominaistajuuden suhde on 1:1 tai 2:1. Koska edelliset taajuudet ovat tyypillisesti lähellä toisiaan ja eripituisten köysien ominaistajuudet vaihtelevat laajalla alueella, on käytännössä vaikea välttää tilannetta, jossa jonkin köyden ja kannen ominaistajuuden yhdistelmä on epäedullinen.

Toinen rakenteellinen ongelma vierekkäisten köysien tapauksessa on toisen köyden aiheuttama turbulenssi ja siitä aiheutuva tuulen alapuolisen köyden pakkovärähtely. Köysivärähtelyjen rajoittamiseksi voidaan vierekkäiset köydet kiinnittää toisiinsa ja edelleen muihin köysipareihin (kuva 39). Menettely on käyttökelpoinen myös väliaikaisena ratkaisuna rakennusvaiheessa.



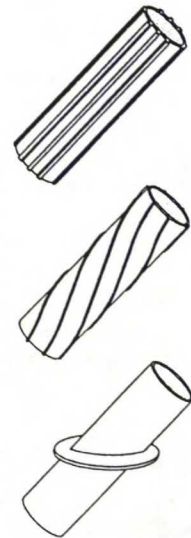
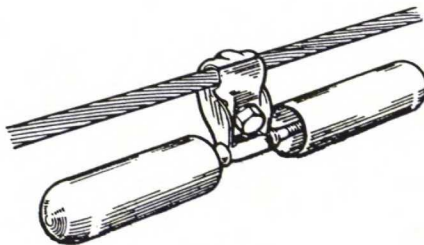
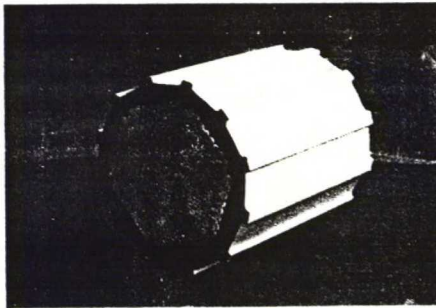
Kuva 39. Köysien sidonta köysivärähtelyjen amplitudin rajoittamiseksi [21].

Köysien päihin voidaan asentaa vaimentimet. Kuvassa 40 on esitetty kannen ja köyden liittymäkohtaan asennettuja vaimentimia - vastaavasti voidaan asentaa vaimentimia myös köyden ja pylonin liitokseen. Vaimentimien mitoitus ja optimointi voidaan tehdä kohdan 5.9.3 mukaisella rakennemallilla kokeilemalla eri vaimennuskertoimien vaikutusta.



Kuva 40. Esimerkkejä köysivaimentimista [21]. Öljyvaimennin (*Arataru*-silta, vasen kuva) ja viskoosi-leikkaus -vaimennin (*Sakitama*-silta, oikea kuva).

Pyörteiden irtaantumisesta aiheutuvaa köyden amplitudin kasvua voidaan rajoittaa kuvan 41 mukaisella "heilurivaimentimella" ("*stockpridge damper*"). Vaimentimen massa valitaan siten, että kiinnityskohdan ympäri tapahtuvan heiluntaliikkeen taajuus yhtyy köyden ominaistajuuteen, jolloin vaimennin absorboi köyden värähtelyn energiaa. Värähtelyitä, jotka ovat sateen indusoimia tai johtuvat pyörteiden irtaantumisesta, voidaan rajoittaa köyden suojaputkien pinnan muotoilulla (kuva 41). Samalla kuitenkin köysipoikki-leikkauksen kitkavastus kasvaa ja jään muodostuminen köysiin helpottuu.



Kuva 41. Heilurivaimennin pyörteiden irtaantumisesta aiheutuvan epästabiiliuden eliminointiin [23] ja muotoiltuja köysien suojaputkia sateen indusoiden värähtelyjen amplitudin pienentämiseksi [1].

8. Yhteenveto

Riippu- ja vinoköysisiltojen aerodynamiikkaa on kansainvälisesti tutkittu 1940-luvulta lähtien *Tacoma*-joen sillan sortumisen seurauksena. Aerodynaamiset epästabiiliusilmiöt ovat siten tiedostettuja ja tutkimusaineistoa aiheesta on saatavilla. Epästabiiliusilmiöiden teoreettinen mallintaminen on vaikeaa, koska ilmiöt ovat kaaottisia - pienet muutoksen herätteessä voivat aiheuttaa suuria muutoksia vasteeseen. Tuulitunnelikokeet ovat toistaiseksi välttämättömiä näiden ilmiöiden luotettavaan analyysiin.

Turbulenssin ja tuulen puuskaisuuden aiheuttamien pakkoliikkeiden vaikutus voidaan matemaattisesti hallita sellaisella tarkkuudella, että tuloksia voidaan hyödyntää suunnittelussa. Työssä esitetty laskentamalli on eräs tapa lineaarisen dynaamisen analyysin suorittamiseen. Laskentamallissa määritetään tarkasteltavalle pisteelle vasteen tehospektrin tiheysfunktio ja siitä edelleen värähtelyn amplitudin keskihajonta (*root mean square response*) ja tehollinen taajuus.

Tuulen heilahtelunopeuden mallintamisen parametrit ovat turbulenssin intensiteetti, tehospektrin tiheysfunktiot ja koherenssivakiot. Tuulen rakenteeseen kohdistamat voimakomponentit muodostetaan voimakertoimien ja kineettisen paineen perusteella. Voimakertoimet ovat kohtauskulman funktioita ja niiden arvot vaihtelevat eri Reynoldsin luvun alueilla. Voimakertoimet ja niiden derivaattojen arvot voidaan määrittää luotettavasti tuulitunnelikokeilla. Vastuskertoimet voidaan arvioida yksinkertaisille poikkeilekkauksille myös kirjallisuudesta.

Työssä esitettyä laskentamallia ja suunniteltua tietokoneohjelmistoa on sovellettu suunnitteilla olevaan Kärkistensalmen vinoköysisillan. Rakennemallin lähtötietojen kokoamisessa on jouduttu tekemään karkeit arvioita, joten lasketut tulokset ovat ainoastaan suuntaa antavia: valmiin sillan jäykistyspalkin värähtelyjen amplitudit ovat tuulen keskinopeuden suunniteluarvolla 23,1 m/s 40 mm:n luokkaa, kun ne rakennusvaiheessa voivat nousta kahteen metriin.

Määritetyt vasteen dynaamisen osan keskihajonnat ovat samaa suuruusluokkaa tuulen keskinopeuden aiheuttamien staattisten siirtymien kanssa. Dynaamisen kuorman vaikutus määräytyy vasteen ääriarvojen keskiarvon perusteella - yksittäinen piikki vasteessa ei välttämättä johda rakenteen vaurioitumiseen. Vasteen ääriarvojen keskiarvo on laskettu Davenportin kaavalla, missä keskihajonta kerrotaan tehollisesta taajuudesta riippuvalla kertoimella (kertoimen arvon ollessa 3,3...3,6).

Vasteen dynaamisen osan keskihajonta on voimakkaasti riippuvainen rakenteen vaimennuskyvystä ja tuulennopeudesta. Laskentamallilla määritetty moodikohtainen vaimennussuhde aerodynaamisesta vaimennuksesta oli n. 0,03 - enemmän kuin oletettu mekaaninen vaimennus (0,003). Aerodynaamista vaimennusta vastaavat vaimennusvakiot määritetään keskinopeuden ja voimakertoimien perustella, joten aerodynaaminen vaimennus on riippuvainen tuulennopeudesta. Sillan jäykistyspalkin vaimennuskyky suurella tuulennopeudella muodostuu laskentamallin perusteella

lähes kokonaan aerodynaamisesta vaimennuksesta. Tämä on virhetoleranssien kannalta edullista, koska mekaaninen vaimennus on vaikea määrittää.

Ominaistaajuuudet on määritetty ottamalla huomioon normaalivoima ja geometrinen jäykkyys kaikille elementeille. Normaalivoimien vaikutus ominaistaajuuksiin on suurimmillaan 0,01 Hz. Laskettu ensimmäinen ominaistaajuus on 0,59 Hz suuremman pylonin värähtelylle. Kannen vääntöväärähtelyn ja pystysuuntaisen liikkeen ominaistaajuuksien suhde on 1,7. Selbergin aproksimaatista laskettu flutterinopeus on -5° kohtauskulmalla 54 m/s.

Laskenta on suoritettu määrittämällä 12 alinta ominaismuotoa ja -taajuutta. Vasteen tehospektrin tiheysfunktioiden kuvaajia tarkastelemalla havaitaan, että riittävään laskentatarkkuuteen päästäisiin jo 6:lla ensimmäisellä ominaismuodolla- ja taajuudella. Toisaalta laskentakapasiteetti ja pyöristysvirheet eivät aiheuttaneet laskuesimerkin ($145 \times 6 = 870$ vapausastetta) yhteydessä ongelmia.

Vaikka esimerkkikohteen tapauksessa tuulikuorma ei näytä aiheuttavan haitallisina pidettäviä värähtelyjä, siltojen aerodynamiikan tarkempi analyysi noussee kuitenkin tulevaisuudessa tärkeäksi - jos Suomessa tehdään päätöksiä pitkän jännevälän siltojen rakentamisesta. Esitetty tietokoneohjelmisto muodostaa tällöin käyttökelpoisen apuvälineen tuulikuorman vaikutuksen mallintamiseksi.

Tehokkaimmat ratkaisut vinoköysisillan aerodynaamisen stabiiliuden varmistamiseksi ovat sillan jäykistäminen, köysien sitominen, jäykistyspalkin muotoilu virtaviivaiseksi ja A:n muotoisten pylonien käyttö. Nämä ratkaisut vaikuttavat voimakkaasti sillan ulkonäköön ja siten niiden käyttö ei ole kaikissa tapauksissa perusteltua □

Lähdeluettelo

- [1] Larsen, A. Aerodynamics of Large Bridges: proceedings of the First International Symposium on Aerodynamics of Large Bridges, Copenhagen, Denmark, 19-21 February 1992. Rotterdam, 1992 - 303 s.
- [2] Krogeburg, J. Strait Crossing: proceedings of the 2:nd Symposium on Strait Crossings Trondheim / Norway / 10-13 June 1990. Rotterdam, 1990
- [3] Kanok-Nukulchai, W. International Conference on Cable-Stayed Bridges: experience & practise: proceedings of the International Conference on Cable-Stayed Bridges, Bangkok, Thailand, November 18-20, 1987. Bangkok, 1987 - 1545 s.
- [4] Troitsky, M. S. Cable-Stayed Bridges: theory and design - 2. ed. Oxford, 1988 - 469 s.
- [5] Thompson, W. T. 1981. Theory of Vibrations with Applications - 2. ed. London 1981 - 485 s.
- [6] Clough, R. W., Penzien, J. Dynamics of Structures. New York London, 1975 - 634 s.
- [7] Kärnä, T. Dynamic and Aeroelastic Action of Guy Cables. Publications / Technical Research Centre of Finland; 18. Espoo 1984 - 69 s.
- [8] Hakala, M. K. Lujuusopin Elementtimenetelmä. Espoo 1991 - 490 s.
- [9] Fagerström, B. Tuulen aiheuttamat kuormat ja herätteet. Siltapäivät RIL K64-1986 - s. 179-202.
- [10] Siltojen kuormat. Tielaitos. Helsinki 1991 - 28 s.
- [11] Eataon, E. J. Proceedings of the Fourth International Conference on Wind Effects of Buildings and Structures, Hertrow 1975. Cambridge 1977 - 845 s.
- [12] Pitkäranta, J. Integraalimuunnokset, Espoo, 1987 - 122 s.
- [13] Elishakoff, I. Probabilistic Methods in the Theory of Structures. New York, 1983 - 289 s.
- [14] Rakenteiden kuormitusohjeet. RIL 144-1982 - 171 s.
- [15] Buraprahat, C. The Bangkok Cable Stayed Bridge. 1987
- [16] Reynolds, A. J. Turbulent Flows in Engineering. London New York, 1974 - 462 s.

- [17] Ito, M., Nakamura, Y. Aerodynamic Stability of Structures in Wind, IABSE Surveys S-20/82 - s. 33-56.
- [18] ECCS - Technical Committee 12, Wind. Recommendations for Calculating the Effects of Wind on Constructions -2. ed. Brussels, 1978 - 73 s.
- [19] International Research Seminar Wind Effects on Buildings and Structures, Ottawa, Canada, 11-15 September 1967. Toronto 1967 772 s.
- [20] Ito, M. Aeroelastic Stability of Structures. Reprinted from Theoretical and Applied Mechanics, Vol 22. Tokyo 1974 - 15 s.
- [21] Ito, M. Cable Stayed Bridges: recent Developments and their Future: proceedings of the seminar, Yokomaha, Japan, 10-11 December 1991. Amsterdam, 1991 - 438 s.
- [22] Hartog, D. Mechanical Vibrations - 4th ed. New York, 1956 - 436 s.
- [23] Sachs, P. Wind Forces in Engineering - 2. ed. Oxford New York, 1978 - 400 s.
- [24] ESDU data item 85020. Characteristics of atmospheric turbulence near the ground : Part II: single point data for strong winds (neutral atmosphere). 1990 - 35 s.
- [25] Selberg, A. Oscillations and Aerodynamic Stability of Suspension Bridges, Acta Polytechnica Scandinavica, Ci 13. Trondheim 1961 - 69 s.
- [26] Kanok-Nukulchai, W., Kwong, P, Brotton, M. Mathematical Modelling of Cable-Stayed Bridges, Structural Engineering International 2/92 - s. 108-112.
- [27] Blevins, R. D. Flow-Induced Vibration. New York, 1977 - 364 s.

HEILAHTELUNOPEUDEN TEHOSPEKTRIN TIHEYSFUNKTIOT VON KÁRMÁNIN MALLISSA [24] ($n = \text{taajuus} = 1/T$)

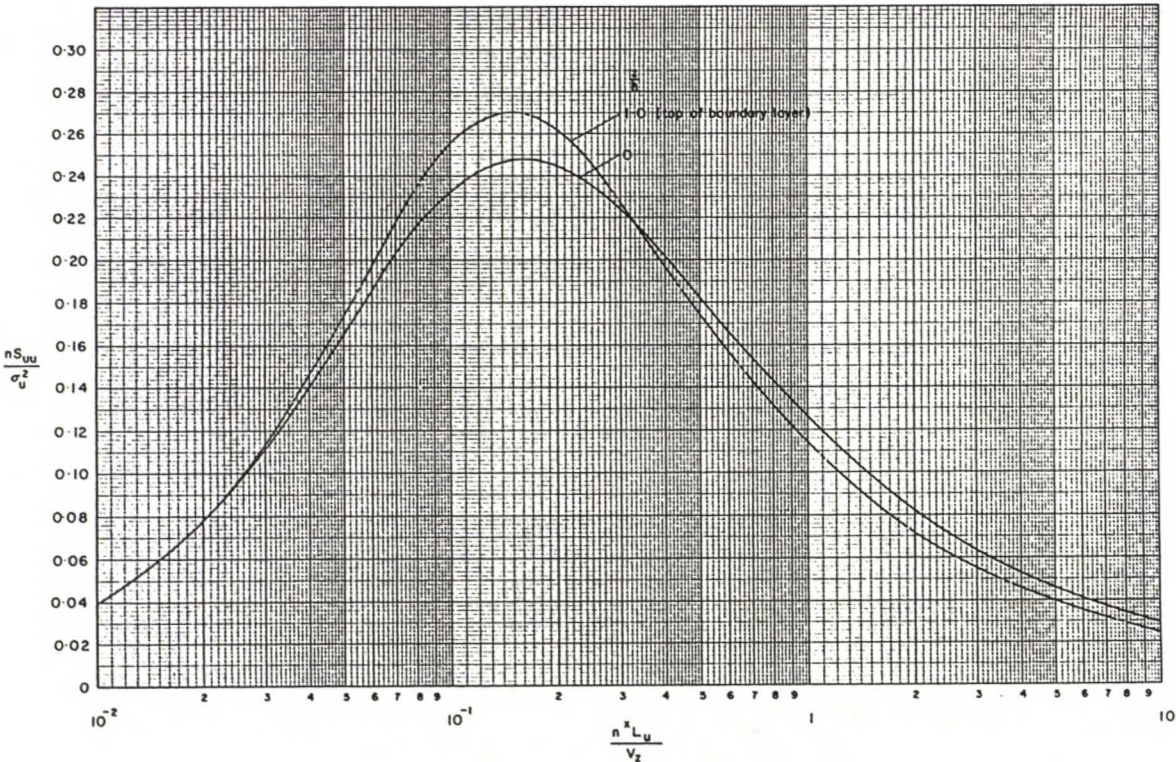


FIGURE B.2 SPECTRAL DENSITY FUNCTION FOR u-COMPONENT

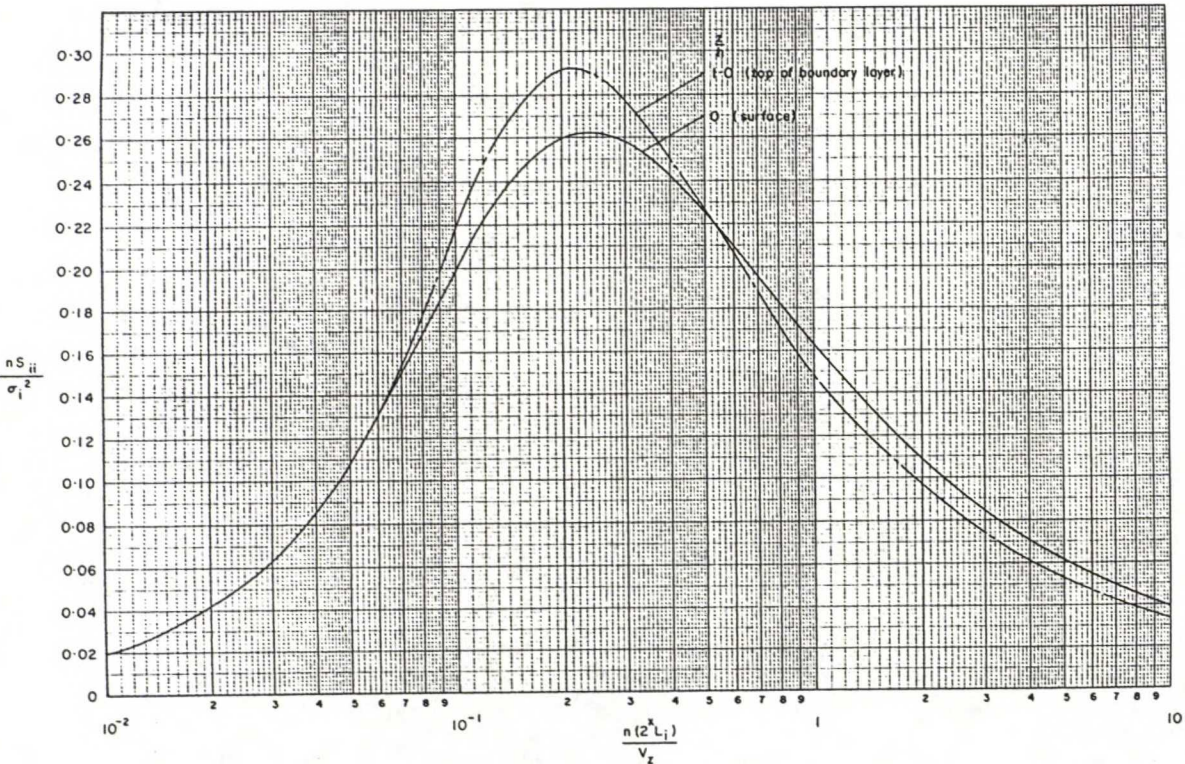


FIGURE B.3 SPECTRAL DENSITY FUNCTION FOR $i = v$ OR w COMPONENT

HEILAHTELUNOPEUDEN TEHOSPEKTRIN TIHEYSFUNKTION PARAMETRI
 INTEGRAL LENGHT SCALE TARKENNETUSSA VON KÁRMÁNIN MALLISSA [24]
 $f = f_c$ (coriolis-parametri) saadaan kaavasta (77).

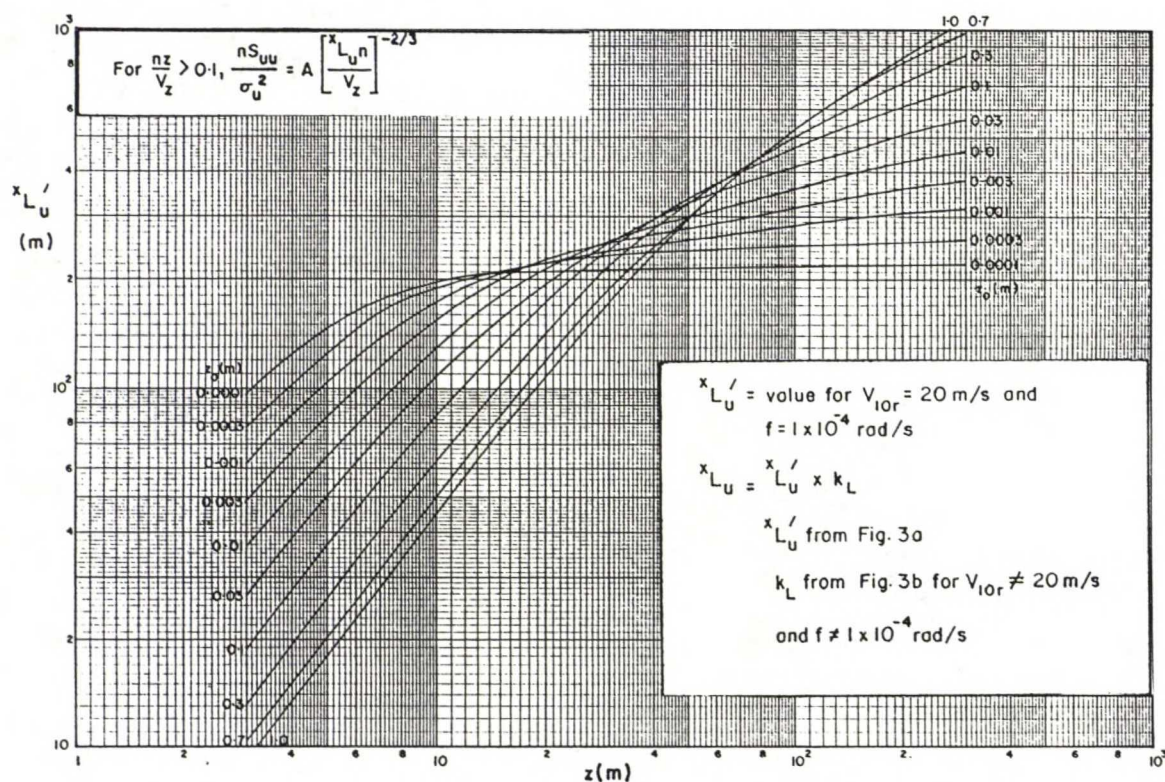


FIGURE 3a. INTEGRAL LENGTH SCALE OF TURBULENCE FOR EQUILIBRIUM CONDITIONS.
 VALUES FOR $V_{10r} = 20$ m/s and $f = 1 \times 10^{-4}$ rad/s

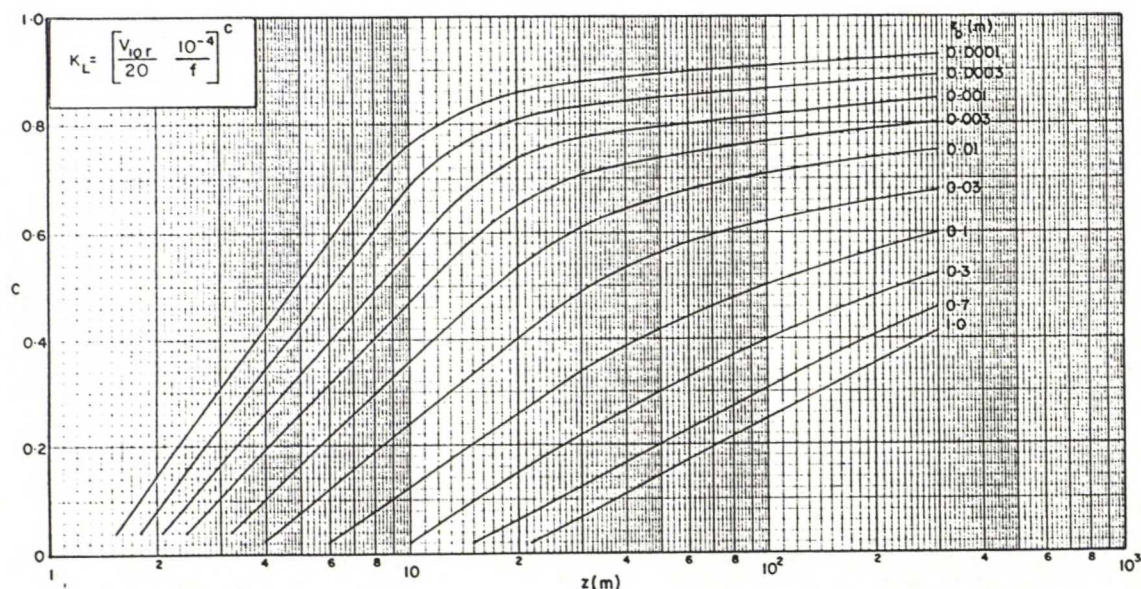


FIGURE 3b. CORRECTION FACTOR FOR EFFECT OF V_{10r} AND f ON x'_{Lu}

TV-ver 1.1 OHJELMISTO

Laskentaohjelmisto puuskaisen tuulen todennäköisyysteoreettiselle mallintamiselle rakenteiden dynaamisessa analyysissä.

Suunnittelija: Risto Kiviluoma -1.2.1992

TV-ohjelmat ovat spektrianalyysin suorittamiseksi suunniteltuja tietokoneohjelmia, jotka yhdessä dynaamiseen analyysiin soveltuvan FEM-ohjelman kanssa mahdollistavat värähtelylle alttiiden rakenteiden tarkemman analyysin tuulikuormalle.

Laskennan kulku on seuraava (ohjelmayksiköt suluissa):

1. Muodostetaan dynaamisen analyysin rakennemalli ja määritetään tarpeellinen määrä ensimmäisiä ominaismuotoja ja taajuuksia (vaimentamattomalle rakenteelle, FEM-ohjelmalla).
2. Määritetään staattiset siirtymät käyttäen kuormana tuulikuorman staattisen osan voimakomponentteja (FEM-ohjelma, TVSTA.EXE).
3. Muodostetaan dynaamisen analyysin liikeyhtälön matriisit (TVMAT.EXE) *). Rakenteellinen vaimennus annetaan moodikohtaisena vaimennussuhteena, aerodynaaminen vaimennus määräytyy TVSTA.EXE ohjelman tulostiedostosta. Ulkoiset vaimentimet voidaan huomioida vapausastekohtaisten vaimennuskertoimien avulla.
4. Ratkaistaan dynaamisen analyysin liikeyhtälö tarkasteltavilla taajuuksilla (TV1.EXE, TV2.EXE, TV3.EXE, TV4.EXE). Vaihe TV4.EXE suoritetaan tarkasteltavalle solmupisteelle.
5. Tulokset voidaan esittää graafisesti (TVPOST.EXE). Tuloksena saadaan
 - Tarkasteltavan solmupisteen vasteen dynaamisen osan keskihajonta (X Y Z suuntiin), tehollinen taajuus ja muut vasteen maksimiarvojen todennäköisyysjakauman parametrit.
 - Vasteen tehospektrin tiheysfunktio tai vaihtoehtoisesti taajuusvaste.
 - Rakenteen todennäköisimmät värähtelytaajuudet.

Ohjelmaan valitut parametrit ovat:

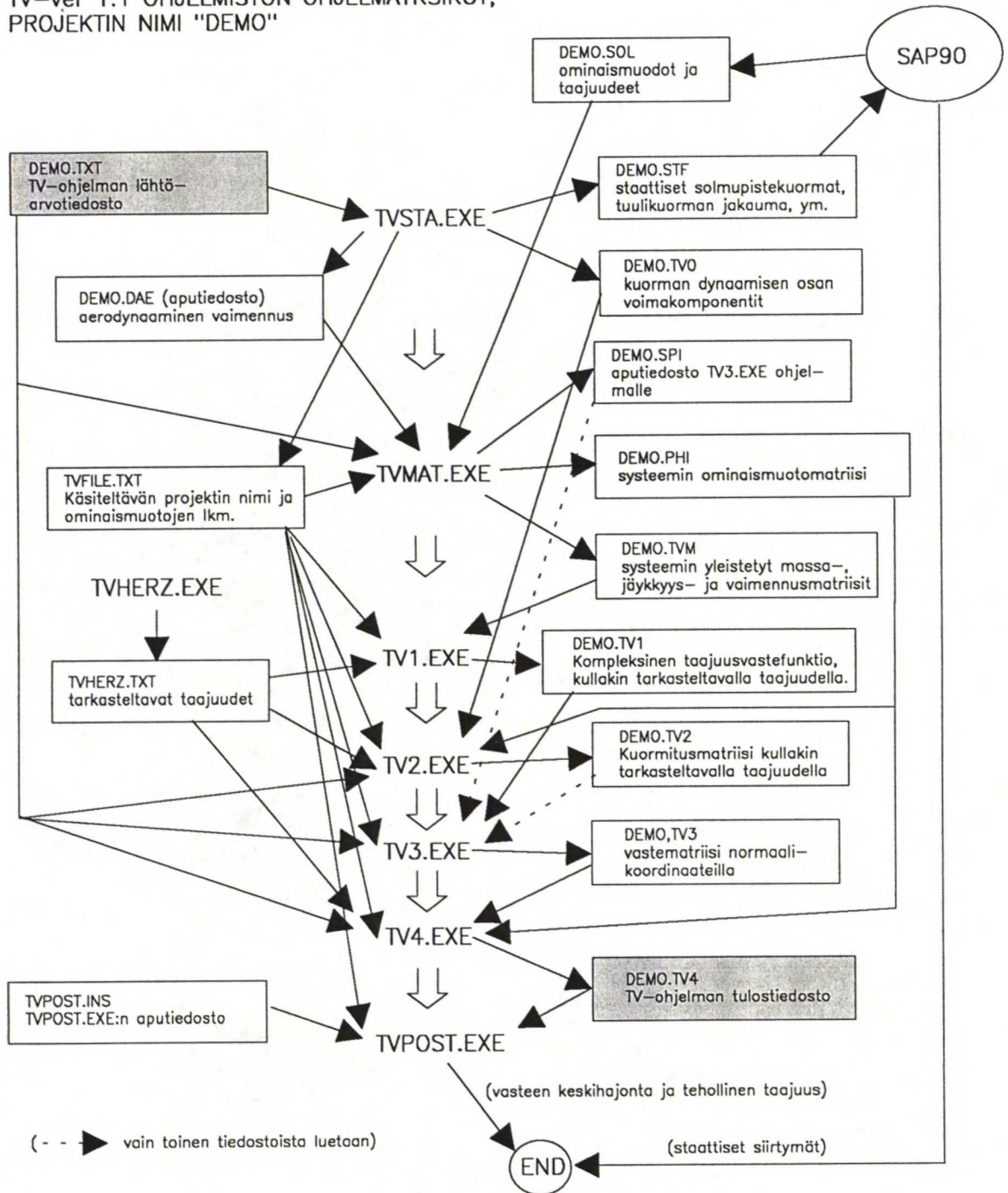
i) Tuulikuorman staattisen osan jakauma, turbulenssin intensiteetti ja maaston karheusluku lähteen [18] perusteella suunnittelutuulennopeuden ja maaston karheusluokan perusteella.

ii) Tuulikuorman dynaaminen osan energiajakauma tarkennetun von Kármánin tehospektrin perusteella, lähteen [24] mukaisesti.

Laskentamallin keskeisiä lähtötietoja ovat voimakertoimet ja niiden derivaattojen arvo nollakulmalla, sekä mekaaninen vaimennus jotka on pyrittävä arvioimaan mahdollisimman luotettavasti.

*) TVMAT.EXE -ohjelma on muodostettu SAP90™ -tulostiedostojen jälkikäsitteilyyn, eikä se siten ole hyödynnettävissä muiden FEM-ohjelmien yhteydessä.

TV-ver 1.1 OHJELMISTON OHJELMAYKSIKÖT,
PROJEKTIN NIMI "DEMO"

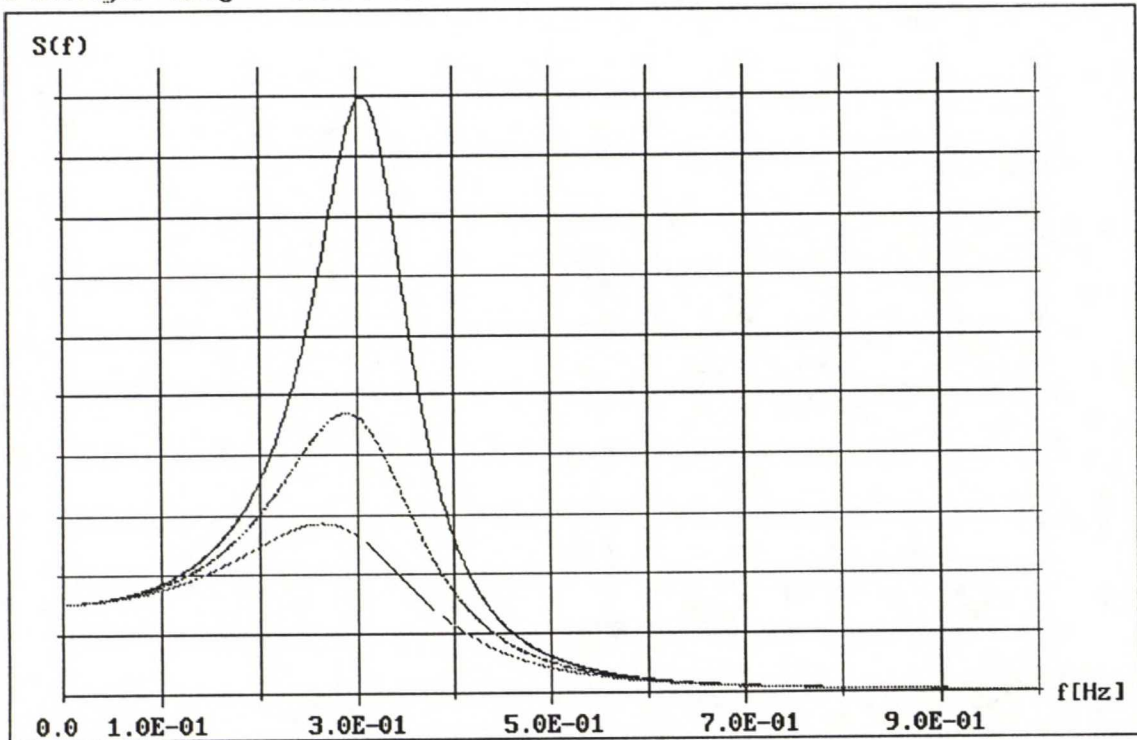


TV-ohjelmistoa voidaan myös soveltaa satunnaisvärähtelyihin liittyvien laskutehtävien ratkaisuun. Ohessa esimerkkinä laskettu yhden vapausasteen värähtelysteemin vasteen tehospektrin tiheysfunktio eri vaimennussuhteen arvoilla, kun heräte on valkoista kohinaa. Esimerkki vastaa diplomitöiden kuvan 16 tapausta ja funktiot kaavaa 55.

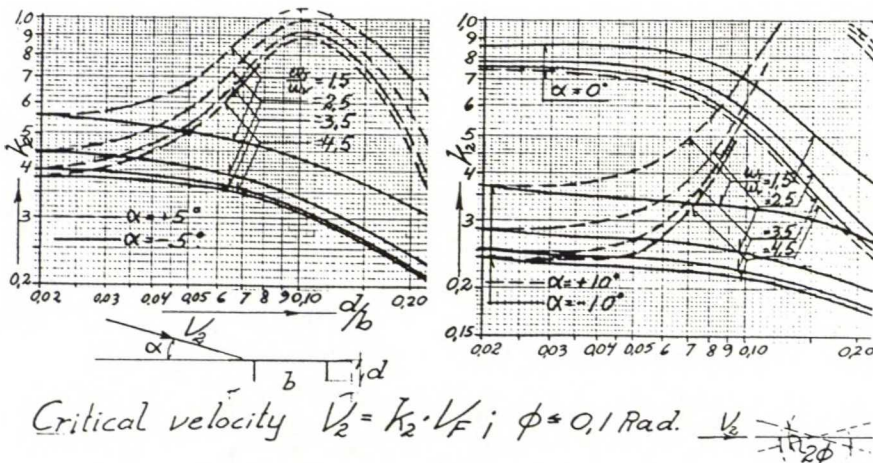
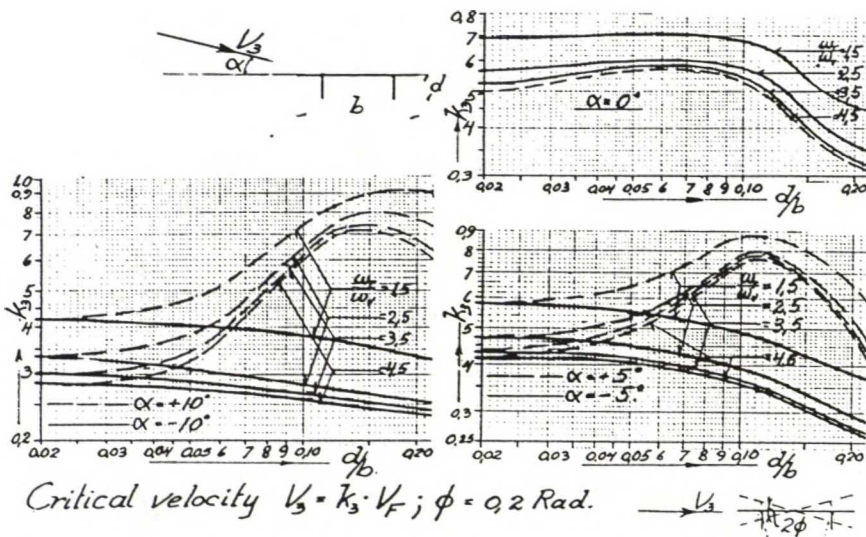
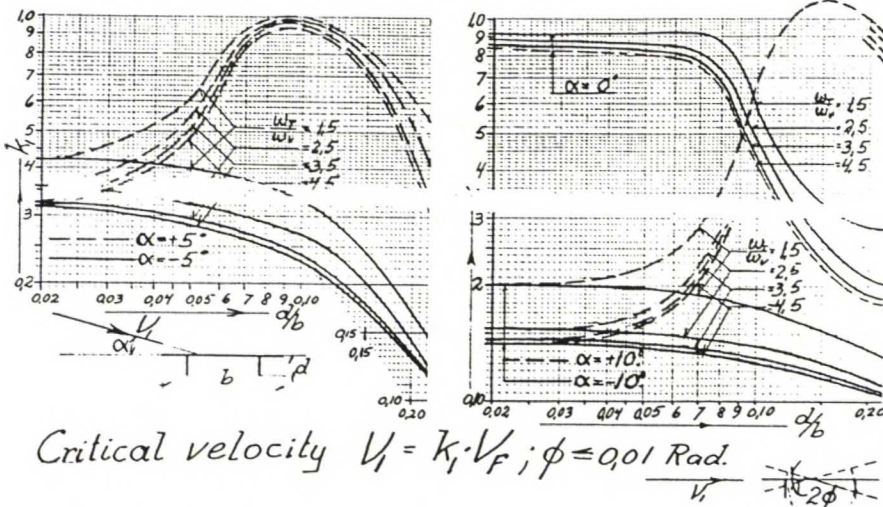
Värähtelysteemin parametrit ovat:

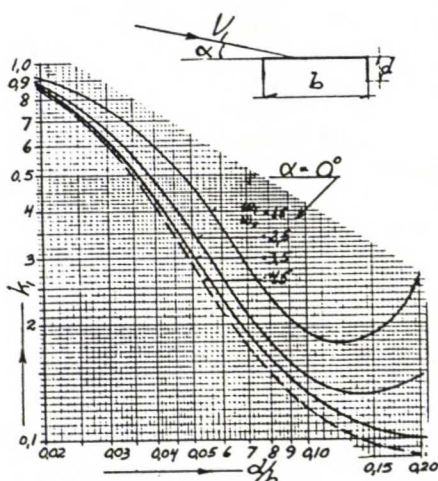
massa = 1 kg,
 jousivakio = 4 N/m,
 josta vaimentamattoman värähtelyn ominaistajuus = 2 rad/s,
 vaimennussuhteet:
 0,2 ylin käyrä ('X-siirtymä'),
 0,3 keskimäinen käyrä ('Y-siirtymä')
 0,4 alin käyrä ('Z-siirtymä').

TIEDOSTO: koe/solmupiste: 1 PVM: 29.01.1993 TUPOST-ver1.1/TIEH/R.Kiviluoma
 X-siirtymä: $k_{haj} = 6.994E-01$, $teho_{l.f} = .305$, $S(fr)_{max} = 4.069E-01$, $fr = .305$
 Y-siirtymä: $k_{haj} = 5.706E-01$, $teho_{l.f} = .298$, $S(fr)_{max} = 1.908E-01$, $fr = .288$
 Z-siirtymä: $k_{haj} = 4.937E-01$, $teho_{l.f} = .291$, $S(fr)_{max} = 1.163E-01$, $fr = .262$

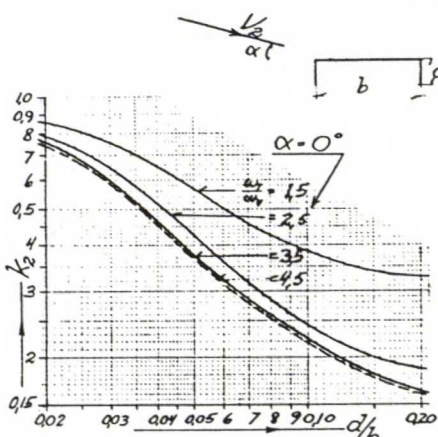
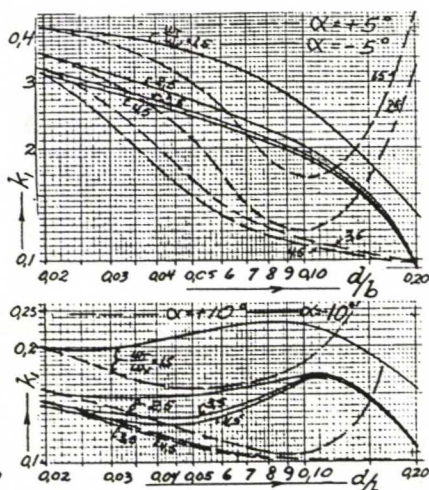


TUULITUNNELIKOKEISIIN PERUSTUVIA FLUTTERINOPEUDEN KORJAUSKERTOIMIA KAHDELLE ERI KANSIPOIKKILEIKKAUKSELLE ERI KOHTAUSKULMAN ARVOILLA SELBERGIN MALLISSA [25].

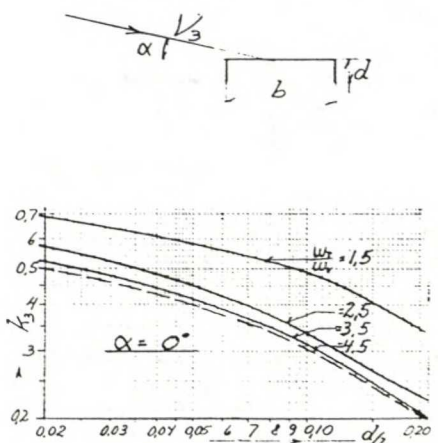
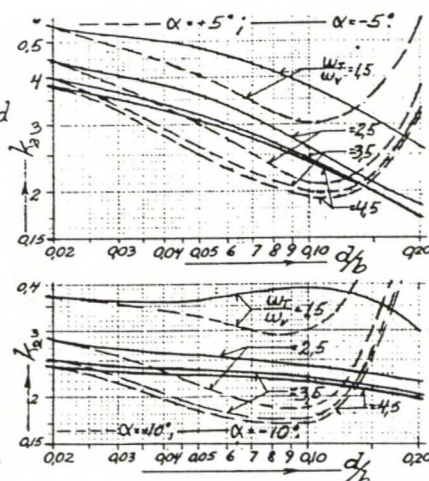




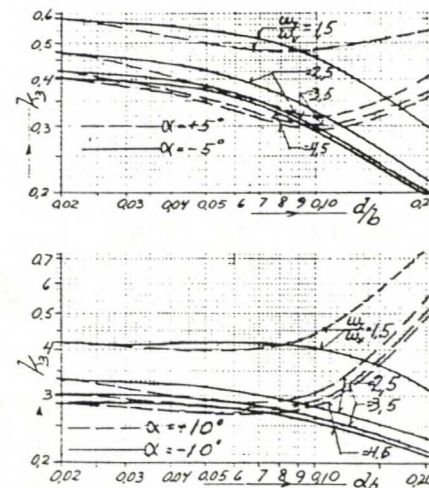
Critical velocity $V_1 = k_1 \cdot V_F$; $\phi \leq 0.01 \text{ Rad.}$



Critical velocity $V_2 = k_2 \cdot V_F$; $\phi \leq 0.1 \text{ Rad.}$



Critical velocity $V_3 = k_3 \cdot V_F$; $\phi \leq 0.2 \text{ Rad.}$



LUVUN 6.2 LASKUESIMERKIN (KÄRKISTENSALMEN SILLAN RAKENNUSVAIHE) LÄHTÖTIEDOT JA TULOSTEET

TV-ohjelmiston lähtöarvotiedosto:

Kärkistensalmen silta, rakennusvaiheen lähtötiedot.

TULOSTUS (tarkasteltava solmupiste, laskennan ohjain 0 tai 1)
45 0

TUULI: (Vref, karkeusluokka 1...5 [ECCS 12], koherenssivakiot X Y Z)
21 2 3 3 6

VOIMAKERTOIMET: numerotunnus, CD, CL, CM, dCD, dCL, dCM

1	2.3	.02	-.02	.0	-.1	.2
2	0.8	.0	.0	.0	.0	.0
3	1.3	.0	.0	.0	.0	.0

SOLMUPISTEET: (nro, X, Y, Z, h, b, L, voimakertoimen tunnus)

2	0.0	257.4	20.0	2.62	13.5	12.5	1
5	0.0	271.8	20.0	2.62	13.5	14.5	1
8	0.0	286.2	20.0	2.62	13.5	14.4	1
11	0.0	300.6	20.0	2.62	13.5	14.4	1
14	0.0	315.0	20.0	2.62	13.5	14.4	1
17	0.0	329.4	20.0	2.62	13.5	14.4	1
20	0.0	343.8	20.0	2.62	13.5	14.4	1
23	0.0	358.2	20.0	2.62	13.5	14.4	1
26	0.0	372.6	20.0	2.62	13.5	14.4	1
29	0.0	387.0	20.0	2.62	13.5	17.5	1
36	0.0	408.0	20.0	2.62	13.5	21.0	1
47	0.0	429.0	19.5	2.62	13.5	21.0	1
54	0.0	450.0	19.5	2.62	13.5	21.0	1
59	0.0	471.0	19.0	2.62	13.5	21.0	1
66	0.0	492.0	19.0	2.62	13.5	21.0	1
71	0.0	498.0	19.0	2.62	13.5	21.0	1
35	-8.0	408.0	20.0	4.9	0.0	22.0	2
38	-7.7	408.0	44.0	4.2	0.0	28.8	2
40	-7.5	408.0	77.6	3.4	0.0	35.8	2
37	8.0	408.0	20.0	4.9	0.0	22.0	3
39	7.7	408.0	44.0	4.2	0.0	28.8	3
41	7.5	408.0	77.6	3.4	0.0	35.8	3

VAIMENNUS: (ominaismuotokohtainen, suhteena kriittiseen vaimennukseen)

1	.001
2	.003
3	.001
4	.001
5	.001
6	.001
7	.001
8	.001
9	.001
10	.001
11	.001
12	.001

TVSTA.EXE ohjelmalla laskettu tuulennopeuden jakauma:

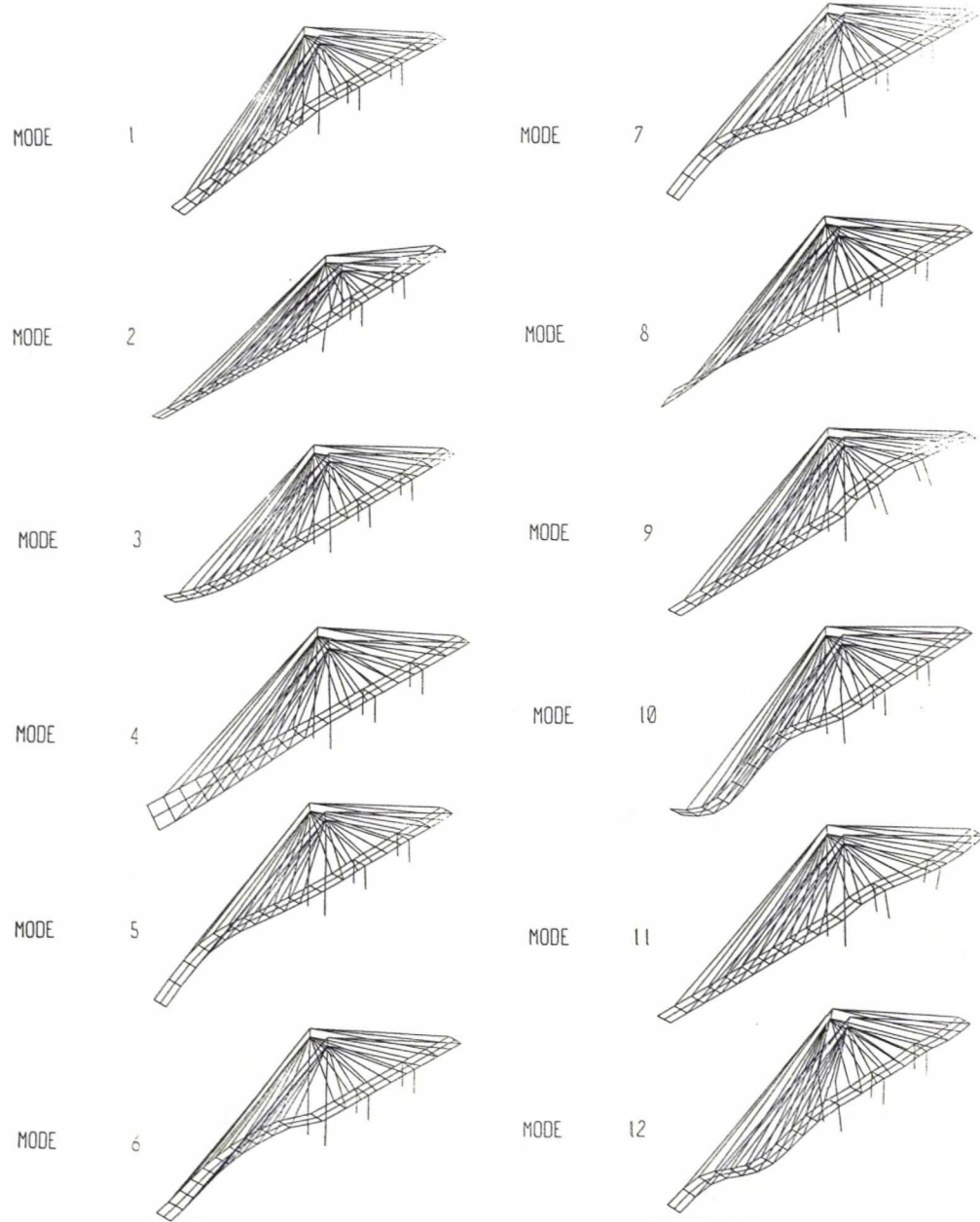
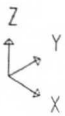
TUULIKUORMAN NOPEUSJAKAUMA, Vref =21.0 m/s, KARKEUSLUOKKA 2, Z0 = .070 m

Z = 5 m,	Vo = 18.1 m/s,	Iu = .23,	(Vk = 29.4 m/s),	Lx = 79.6 m
Z = 10 m,	Vo = 21.0 m/s,	Iu = .20,	(Vk = 32.7 m/s),	Lx = 79.6 m
Z = 15 m,	Vo = 22.8 m/s,	Iu = .19,	(Vk = 34.6 m/s),	Lx = 79.6 m
Z = 20 m,	Vo = 24.0 m/s,	Iu = .18,	(Vk = 35.9 m/s),	Lx = 151.3 m
Z = 25 m,	Vo = 24.9 m/s,	Iu = .17,	(Vk = 36.9 m/s),	Lx = 151.3 m
Z = 30 m,	Vo = 25.7 m/s,	Iu = .17,	(Vk = 37.7 m/s),	Lx = 211.3 m
Z = 35 m,	Vo = 26.4 m/s,	Iu = .16,	(Vk = 38.4 m/s),	Lx = 211.3 m
Z = 40 m,	Vo = 26.9 m/s,	Iu = .16,	(Vk = 39.0 m/s),	Lx = 263.6 m
Z = 45 m,	Vo = 27.4 m/s,	Iu = .15,	(Vk = 39.6 m/s),	Lx = 263.6 m
Z = 50 m,	Vo = 27.9 m/s,	Iu = .15,	(Vk = 40.1 m/s),	Lx = 298.2 m
Z = 55 m,	Vo = 28.3 m/s,	Iu = .15,	(Vk = 40.5 m/s),	Lx = 298.2 m
Z = 60 m,	Vo = 28.6 m/s,	Iu = .15,	(Vk = 40.9 m/s),	Lx = 323.9 m
Z = 65 m,	Vo = 29.0 m/s,	Iu = .15,	(Vk = 41.2 m/s),	Lx = 323.9 m
Z = 70 m,	Vo = 29.3 m/s,	Iu = .14,	(Vk = 41.6 m/s),	Lx = 349.6 m
Z = 75 m,	Vo = 29.6 m/s,	Iu = .14,	(Vk = 41.9 m/s),	Lx = 349.6 m
Z = 80 m,	Vo = 29.9 m/s,	Iu = .14,	(Vk = 42.2 m/s),	Lx = 375.1 m
Z = 85 m,	Vo = 30.1 m/s,	Iu = .14,	(Vk = 42.5 m/s),	Lx = 375.1 m
Z = 90 m,	Vo = 30.4 m/s,	Iu = .14,	(Vk = 42.7 m/s),	Lx = 383.1 m
Z = 95 m,	Vo = 30.6 m/s,	Iu = .14,	(Vk = 43.0 m/s),	Lx = 383.1 m
Z = 100 m,	Vo = 30.8 m/s,	Iu = .14,	(Vk = 43.2 m/s),	Lx = 400.5 m

OMINAISMUODOT JA TAAJUUDET VAIMENTAMATTOMALLE RAKENTEELLE

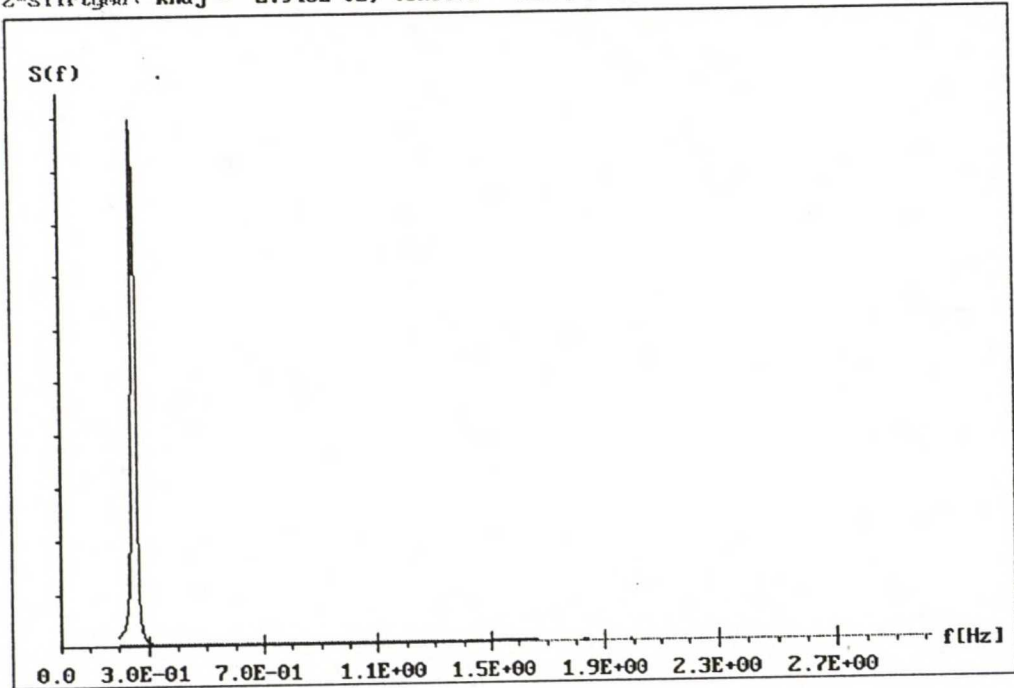
EIGENVALUES AND FREQUENCIES

MODE NUMBER	EIGENVALUE (RAD/SEC)**2	CIRCULAR FREQ (RAD/SEC)	FREQUENCY (CYCLES/SEC)	PERIOD (SEC)
1	0.252809E+01	0.159000E+01	0.253056	3.951694
2	0.984125E+01	0.313708E+01	0.499281	2.002879
3	0.111586E+02	0.334045E+01	0.531649	1.880941
4	0.321117E+02	0.566672E+01	0.901886	1.108788
5	0.327985E+02	0.572700E+01	0.911480	1.097116
6	0.532397E+02	0.729655E+01	1.161282	0.861117
7	0.725029E+02	0.851486E+01	1.355183	0.737908
8	0.765884E+02	0.875148E+01	1.392841	0.717957
9	0.847022E+02	0.920338E+01	1.464764	0.682704
10	0.132713E+03	0.115201E+02	1.833482	0.545410
11	0.156710E+03	0.125184E+02	1.992362	0.501917
12	0.173409E+03	0.131685E+02	2.095828	0.477138

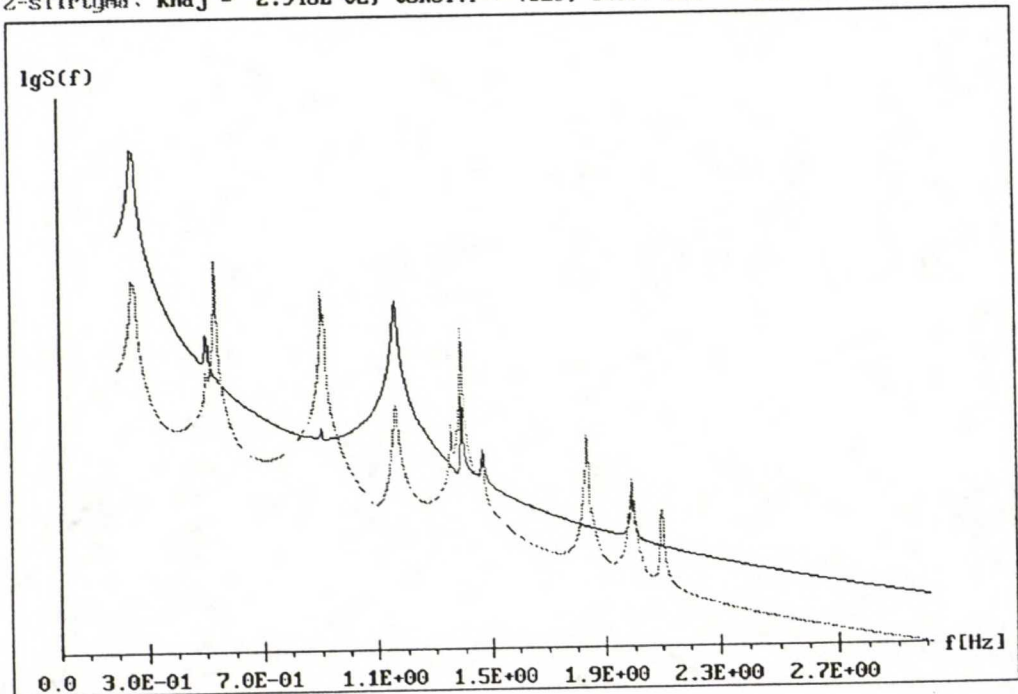


TULOSTUS SOLMUPISTEELLE 3

TIEDOSTO: kserec/solmupiste: 3 PUM: 29.01.1993 TUPOST-ver1.1/TIEH/R.Kiviluoma
 X-siirtymä: khaj = 4.411E-01, tehol.f = .246, S(fr) max = 1.521E+00, fr = .250
 Z-siirtymä: khaj = 2.946E-02, tehol.f = .529, S(fr) max = 7.942E-03, fr = .530

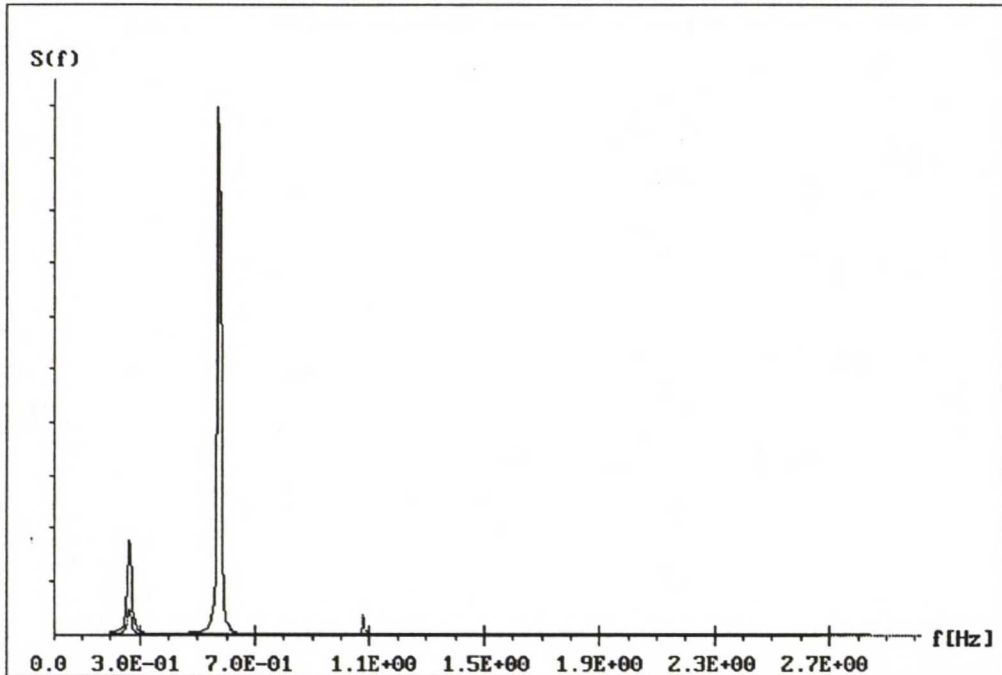


TIEDOSTO: kserec/solmupiste: 3 PUM: 29.01.1993 TUPOST-ver1.1/TIEH/R.Kiviluoma
 X-siirtymä: khaj = 4.411E-01, tehol.f = .246, S(fr) max = 1.521E+00, fr = .250
 Z-siirtymä: khaj = 2.946E-02, tehol.f = .529, S(fr) max = 7.942E-03, fr = .530



TULOSTUS SOLMUPISTEELLE 45

TIEDOSTO: kserec/solmupiste: 45 PVM: 29.01.1993 TUPOST-ver1.1/TIEH/R.Kiviluoma
 X-siirtymä: khaj = 2.788E-02, tehol.f = .519, S(fr) max = 5.706E-03, fr = .571
 Y-siirtymä: khaj = 7.958E-03, tehol.f = .631, S(fr) max = 2.635E-04, fr = .263



TIEDOSTO: kserec/solmupiste: 45 PVM: 29.01.1993 TUPOST-ver1.1/TIEH/R.Kiviluoma
 X-siirtymä: khaj = 2.788E-02, tehol.f = .519, S(fr) max = 5.706E-03, fr = .571
 Y-siirtymä: khaj = 7.958E-03, tehol.f = .631, S(fr) max = 2.635E-04, fr = .263

